

On désigne par

- n et m des entiers > 0 tels que $n \leq m$;
- E l'espace euclidien \mathbb{R}^n avec son produit scalaire usuel $(\cdot | \cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$;
- $e_j, j = 1, \dots, m$, des éléments non nuls de E satisfaisant une condition de la forme

$$(1) \quad \forall x \in E, \alpha \|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^m (x|e_j)^2$$

où α est un réel > 0 ;

- T l'endomorphisme de E défini par

$$T(x) = \sum_{j=1}^m (x|e_j) e_j.$$

1. Donner un exemple simple de famille (e_j) satisfaisant une condition de la forme (1).
2. Déterminer le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_j .
3. On prend $n = 2, m = 3, e_1 = (0, 1), e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2), e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$. Déterminer $\sum_{j=1}^3 (x|e_j)^2$ et T .
4. Vérifier que T satisfait $(T(x)|x) \geq \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in E$ et que T est bijectif.
5. Trouver un réel β tel que $(T^{-1}(x)|x) \leq \beta \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

On note F l'espace euclidien $\mathbb{R}^m, (f_1, \dots, f_m)$ sa base naturelle, $(\cdot | \cdot)_F$ son produit scalaire naturel. On définit une application linéaire $\Phi : E \rightarrow F$ par

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^m (x|e_j) f_j.$$

On pourra admettre qu'il existe une unique application linéaire $\Psi : F \rightarrow E$ satisfaisant

$$(\Psi(h)|x) = (h|\Phi(x))_F \text{ pour tous } x \in E, h \in F.$$

6. Vérifier que l'on a, pour $h \in F, \Psi(h) = \sum_{j=1}^m h_j e_j$, où h a pour coordonnées (h_1, \dots, h_m) dans la base (f_1, \dots, f_m) et $\Psi \circ \Phi = T$.

On pose $\tilde{e}_j = T^{-1}(e_j)$ et on définit une application linéaire $\tilde{\Phi} : E \rightarrow F$ par

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_{j=1}^m (x|\tilde{e}_j) f_j.$$

7. (a) Montrer que :

$$\forall x, y \in E, (T(x)|y) = (x|T(y)).$$

En déduire que :

$$\forall x, y \in E, (T^{-1}(x)|y) = (x|T^{-1}(y)).$$

- (b) Montrer que $\tilde{\Phi} = \Phi \circ T^{-1}$.

- (c) En déduire que :

$$F = \text{Im } \tilde{\Phi} \oplus (\text{Im } \Phi)^\perp.$$

8. Soit $x \in E$, on pose $y = \Phi \circ T^{-1}(x) = \tilde{\Phi}(x)$.

- (a) Montrer que $\ker \Psi = (\text{Im } \tilde{\Phi})^\perp$.

- (b) Soit p la projection orthogonale sur $\ker \Psi$.

En déduire que $p(y) = 0$.

- (c) Montrer que :

$$\min_{z \in \ker \Psi} \|y - z\|_F^2 = \|y\|_F^2.$$

- (d) Montrer que :

$$y \in \Psi^{-1}(\{x\}).$$

- (e) Déterminer le minimum des nombres $\sum_{j=1}^m h_j^2$ pour les familles (h_j) vérifiant $x = \sum_{j=1}^m h_j e_j$, et préciser pour quelles familles (h_j) ce minimum est atteint.