Devoir à la maison n° 14 :

A rendre pour le : lundi 22 juin - FACULTATIF

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}.$$

1. (a) Etudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n}$.
   (b) Déterminer un équivalent de (S_n).
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
   Dans la suite, la limite de la suite (u_n) sera notée l.
3. On considère la suite (A_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{2n} = S_{2n} - S_n - \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   (b) Montrer qu'il existe un réel γ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

   (c) Montrer que la suite (A_{2n}) converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
   (d) En déduire que la suite (A_{2n+1}) converge et déterminer sa limite en fonction de γ.
   (e) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}$ converge et calculer, en fonction de γ :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\ln(k)}{k}.$$