Devoir à la maison n° 4 :

A rendre pour le : lundi 17 novembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

1. **Un premier cas particulier**

   Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

   (a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x.$$

   i. Calculer $f(0)$.
   ii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x et f.
   iii. En déduire la fonction f.

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x.$$

2. **Un second cas particulier**

   Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

   (a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x.$$

   i. Calculer $f(0)$.
   ii. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x et F.
   iii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x et f. Calculer $f'(0)$.
   iv. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f''(x)$ en fonction de x et f.
   v. En déduire la fonction f.

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x.$$