Devoir à la maison n° 5 :

A rendre pour le : lundi 8 décembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Soit E un ensemble et soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}). \end{array}$$

1. Expliciter f dans le cas particulier où $A = B$.
2. Calculer $f(\emptyset)$, $f(E)$, $f(A)$, $f(B)$, $f(\overline{A})$, $f(\overline{B})$, $f(A \cap B)$ et $f(A \cup B)$.
3. (a) Montrer que l'équation $f(X) = \emptyset$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ admet au moins une solution ssi $A \cap B = \emptyset$.
   (b) Dans le cas où $A \cap B = \emptyset$, déterminer toutes les solutions de l'équation $f(X) = \emptyset$.
4. (a) Montrer que :
   $$\forall X \in \mathcal{P}(E),\ f(X) \subset A \cup B.$$
   (b) Montrer que l'équation $f(X) = E$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ admet au moins une solution ssi $A \cup B = E$.
   (c) Dans le cas où $A \cup B = E$, déterminer toutes les solutions de l'équation $f(X) = E$.

Problème 2 :

Soit t un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

1. (a) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (b) Etudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$.

   On considère également deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}.$$
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1}. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer de même le sens de variations de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.
5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
6. Déduire alors de la question 1. que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite, que l'on notera L.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n. En déduire que pour tout réel t strictement positif, on a :
   $$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1.$$

L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t.
Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = L$.
Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$, pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.

8. Déterminer $f(1)$.
9. Calculer :
   $$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{t-1}.$$
   En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.
10. (a) Montrer que :
    $$\forall t_1 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall t_2 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n(t_1.t_2) = x_n(t_1).x_n(t_2).$$
    (b) En déduire :
    $$\lim_{n\to+\infty} (u_n(t_1.t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2)).$$

(c) Donner une relation entre $f(t_1.t_2)$, $f(t_1)$ et $f(t_2)$.

11. (a) Montrer que pour tout réel t strictement positif et tout réel h tel que $t+h$ strictement positif, on a :

$$f(t+h)-f(t)=f\left(1+\frac{h}{t}\right).$$

(b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $f'(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}^{+*}$.

(c) En justifiant votre réponse, exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

12. Exprimer pour tout entier naturel n, $x_n(t)$ en fonction de n et de t. Retrouver alors directement le résultat de 11.c.