PCSI 1 | **Devoir à la maison n° 6 :** | 2025/2026

A rendre pour le : lundi 12 janvier

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Soit m un réel strictement positif, soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité d'ordre 3.

1. (a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
$$M^2 = aM + bI.$$
   (b) Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que :
$$MX = \lambda X.$$
   Montrer que :
$$\lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 2.$$
2. On pose :
$$P = \frac{1}{3}(M + I) \text{ et } Q = -\frac{1}{3}(M - 2I).$$
   (a) Calculer PQ, QP, P^2 et Q^2.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de P^n et Q^n en fonction de P et Q.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de M^n en fonction de P et Q.
   (d) Déterminer deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$M^n = a_n I + b_n M.$$
   (e) La formule précédente reste-t-elle valable si $n = -1$?

Problème 2 :

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation fonctionnelle d'inconnue $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in]0, +\infty[,\ f(x.y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

1. Soit f vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que $f(1) = 0$.
   (b) Montrer que :
$$\forall x, y \in]0, +\infty[,\ f(y) - f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$
2. Soit f **continue en 1** vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(x^n) = n f(x).$$
   (c) Montrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ f(x^{1/q}) = \frac{f(x)}{q}.$$
   (d) Montrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \forall r \in \mathbb{Q},\ f(x^r) = r f(x).$$
   (e) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(e^x) = x f(e).$$
   (f) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = a \ln(x).$$
3. Déterminer toutes les fonctions vérifiant $(*)$ continues en 1.