Devoir à la maison n° 7 :

A rendre pour le : lundi 2 février

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

On considère la fonction :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}(x). \end{array}$$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n},$$

   et exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

   (b) Calculer P_1, P_2 et P_3.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

2. On considère la fonction :

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+x^2)f''(x) + 2xf'(x). \end{array}$$

   (a) Calculer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $g^{(n)}$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, (1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)f^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0.$$

   (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, P_{n+2} + 2(n+1)XP_{n+1} + n(n+1)(1+X^2)P_n = 0.$$

   (d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, (1+X^2)P_n'' - 2(n-1)XP_n' + n(n-1)P_n = 0.$$

3. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \forall x \in \mathbb{R},\, f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

   (b) Soit $n \geq 2$, déterminer les racines réelles de P_n.

   (c) Soit $n \geq 2$, en déduire la factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P_n.

4. (a) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on pose :

$$\varphi: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x+a}. \end{array}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\varphi^{(n)}$.

   (b) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x+b}\right).$$

   (c) Soit $n \geq 2$, en déduire l'expression de $f^{(n)}$. On simplifiera l'expression obtenue de façon à ne faire apparaître que des nombres réels.

   (d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, P_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}(-1)^k X^{n-1-2k}.$$

5. On défini la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

   (a) Etudier les variations de f'' et montrer que $|f''|$ admet un maximum M que l'on déterminera.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![1,n]\!]$, montrer que :

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{k^2}{n^4}M.$$

   (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n} + \frac{M}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

   (d) En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la valeur de sa limite.