

A rendre pour le : lundi 9 mars**Les résultats doivent être encadrés.****Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.****Problème 1 :**

1. Montrer que :

$$\operatorname{Arcsin} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

2. (a) On pose, pour
- $n \in \mathbb{N}^*$
- ,

$$\begin{aligned} f_n : [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (-1)^n \sin x - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Montrer que f_n est bijective de $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ vers un intervalle que l'on précisera.

- (b) En déduire que, pour
- $n \in \mathbb{N}^*$
- , l'équation
- $|x \sin x| = 1$
- admet une unique solution dans
- $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$
- . On notera
- x_n
- cette solution.

3. Montrer que :

$$x_n \sim n\pi.$$

4. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = x_n - n\pi.$$

- (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x_n}.$$

- (b) En déduire que :

$$y_n \sim \frac{1}{n\pi}.$$

(On indiquera clairement le raisonnement effectué.)

5. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z_n = x_n - n\pi - \frac{1}{n\pi}.$$

- (a) Montrer que :

$$z_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n\pi} + z_n = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n}.$$

- (c) En déduire que :

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6n^3\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Problème 2 :

A - Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ sinon

1. Obtenir l'ensemble de définition D de f .
2. f est-elle dérivable en 0?
3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$.
4. Dresser le tableau de variations de f . On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

B - Etude de la suite (v_n) telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.
2. Justifier que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
4. Enoncer l'inégalité des accroissements finis.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.
6. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Etude de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)}$

1. On admet que, sur $D \setminus \{0\}$, $g'(x) = \frac{1+x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ où $h(x) = \ln(x) + \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
Etudier les variations de g .
2. Déterminer la limite de g en 1.
3. Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f .
4. Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = e$.

D - Solutions d'une équation différentielle

On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.

On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K .

1. On pose $y = \frac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) .
2. Résoudre (E_2) sur K . On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}$.

Vérifier que, pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K . On a donc ainsi $z(x) = \frac{x}{\ln(ax)}$.

E - Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

On pose $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition J de H .
2. Etudier la limite de H en 0.
3. Justifier qu'il existe un réel a dans $]0; 1[$ tel que

$$\forall x \in [a; 1[, \quad \frac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

En déduire la limite de H à gauche en 1.