Devoir surveillé n° 3 :

Samedi 22 novembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{n} z^{2k} = -1.$$

Exercice 2 :

1. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}.$$

2. En déduire une primitive sur $]0,1[$ de :

$$t \mapsto \frac{1}{t^2(1-t^2)}.$$

3. En déduire une primitive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)\cos(x)}.$$

Exercice 3 :

Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$x(1+x^2)y' - (1-x^2)y = x.$$

Problème 1 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

1. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Calculer $S_n(z)$.
2. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

   $$S_3(z) = i.$$

   (b) Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que :

   $$S_3(z) \in \mathbb{R}.$$

3. On suppose que $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$.
   (a) Montrer que : $S_n(z) = \frac{2}{1-z}$.
   (b) Déterminer le module et un argument de $S_n(z)$.
4. On suppose que $n \geq 3$ et $z \in \mathbb{U}_{n-2} \setminus \{1\}$.
   (a) Calculer $S_n(z)$ en fonction de z.
   (b) Déterminer le module et un argument de $S_n(z)$.
5. On suppose que $n \geq 2$. On pose :

   $$E = \{z \in \mathbb{U}, |S_n(z)| = 1\}.$$

   (a) Soit $z \in \mathbb{U}_{n-1} \setminus \{1\}$. Montrer que $z \in E$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{U}_{n+1} \setminus \{1\}$. Montrer que $z \in E$.
   (c) Soit $z \in E$.
      i. Montrer que $|z^n - 1| = |z - 1|$.
      ii. En déduire que : $z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}$.
      iii. En déduire z.
   (d) Conclure.

Problème 2 :
On pose :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q\, dx.$$

1. (a) Montrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I(p,q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1,q).$$

   (b) En déduire que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0).$$

   (c) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, en déduire l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q.
   (d) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, en déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}.$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{1}{I(n,n)}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n\, dt.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $f_n(1)$.
   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) + f_n(1-x) = 1.$$

   (c) En déduire la valeur de $f_n(\frac{1}{2})$.

Problème 3 :
L'objectif de ce problème est de résoudre le système différentielle d'inconnue (y,z) avec $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} y'(x) & = & -2y(x) - z(x) + \cos(x) \\ z'(x) & = & y(x) - 2z(x) + \sin(x) \end{array} \right.$$

1. **Première méthode :**
   On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y(x) + iz(x).$$

   (a) Montrer que (y,z) est solution de (S) ssi :

$$f' + (2-i)f = e^{ix} \qquad (E_1).$$

   (b) Résoudre (E_1).
   (c) En déduire les solutions de (S).
2. **Deuxième méthode :**
   (a) Soit (y,z) une solution de (S).
      i. Montrer que y et z sont deux fois dérivables.
      ii. Montrer que y est solution de :

$$y'' + 4y' + 5y = 2\cos(x) - 2\sin(x) \qquad (E_2).$$

      iii. Résoudre (E_2).
   (b) En déduire les solutions de (S).