PCSI 1

Devoir surveillé n° 4 :

2025/2026

Samedi 13 décembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \left\lfloor \dfrac{x}{3} \right\rfloor \end{array}.$
2. $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x, x+y, -x) \end{array}.$

Exercice 2 :

Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on définit la différence symétrique de A et B notée $A\Delta B$ par :

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

1. Montrer que :
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Simplifier $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$.
3. Montrer que :
$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\Delta B = (A\cup B)\Delta(A\cap B).$$
4. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Simplifier $(A\cap B)\Delta(\overline{A}\cap B)$.

Problème 1 :

Soit (u_n) une suite de réels. On suppose que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq l$ et que $\left(\dfrac{|u_{n+1}-l|}{|u_n-l|}\right)$ converge vers $L \in \mathbb{R}^+$.

1. Questions préliminaires.
   Ces questions permettent de justifier la définition qui va suivre mais elles ne sont pas utiles pour les questions suivantes.
   (a) Montrer que $L \leq 1$. On pourra raisonner par l'absurde.
   (b) On suppose que $0 < L < 1$. Montrer qu'il existe $k \in]0,1[$, $C \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :
   $$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq Ck^n.$$

On dit que :

- la suite (u_n) converge lentement vers l ssi $L = 1$,
- la suite (u_n) converge rapidement vers l ssi $L = 0$,
- la suite (u_n) converge géométriquement vers l ssi $0 < L < 1$.

Lorsqu'on demande d'étudier la vitesse de convergence d'une suite (u_n), il s'agit de dire si la suite converge lentement, rapidement ou géométriquement.

2. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3n-5}{n+5}.$$
   (a) Etudier la convergence de (u_n).
   (b) Etudier la vitesse de convergence de (u_n).
3. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$
   (a) Etudier la convergence de (u_n).
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}.$$
   (c) Etudier la vitesse de convergence de (u_n).
4. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{2n} = \frac{1}{2n} \text{ et } u_{2n+1} = \frac{5}{2n+1}.$$
   (a) Etudier la convergence de (u_n). On notera l la limite de (u_n).
   (b) Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{|u_{n+1}-l|}{|u_n-l|}\right)$?
5. Soit $a \in]0,1[$. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \left(1+a^n\right)^{1/a^n}.$$
   (a) Etudier la convergence de (u_n) et (v_n).
   (b) On admet que :
   $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = -\frac{e}{2}.$$
   Etudier la vitesse de convergence de (u_n) et (v_n).
6. On pose :
   $$u_0 > \sqrt{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$
   (a) Montrer que (u_n) est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\sqrt{2}, +\infty[$.
   (b) i. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{2-u_n^2}{2u_n}.$$
   ii. En déduire la monotonie de (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) converge.
   (d) Montrer que :
   $$\lim u_n = \sqrt{2}.$$
   (e) i. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n}\right).$$

ii. En déduire la vitesse de convergence de (u_n).

7. On pose :

$$u_0 \in [1, \sqrt{2}[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}(u_n^2 - 2).$$

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, \sqrt{2}[$.

(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(c) i. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = (u_n - \sqrt{2})(1 - \frac{1}{4}(u_n + \sqrt{2}))$$

ii. En déduire la vitesse de convergence de (u_n).

⚠ Ce problème doit être traité en dernier.
Il ne sera corrigé que si le reste du devoir est bien traité.

Problème 2 :

Ce problème est la suite de l'exercice 2. On pourra utiliser les définitions et les résultats de l'exercice 2.

1. Soient $f, g : E \to \mathbb{Z}$. On dit que f et g sont congrues modulo 2 et on note $f \equiv g\,[2]$ ssi il existe $h : E \to \mathbb{Z}$ telle que :

$$f = g + 2h.$$

(a) Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ \mathbb{1}_{A\Delta B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\,[2].$$

(b) Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ \mathbb{1}_A \equiv \mathbb{1}_B\,[2] \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B.$$

2. (a) Montrer que :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

(b) Montrer que :

$$\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}(E),\ A\Delta B = C\Delta D \iff A\Delta C = B\Delta D.$$

3. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose :

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A\Delta X. \end{array}$$

Montrer que f_A est bijective et déterminer f_A^{-1}.

4. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cap A)\Delta B \end{array},\quad X_0 \in \mathcal{P}(E) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = f(X_n).$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{1}_{X_n} \equiv \mathbb{1}_{X_0}\mathbb{1}_A + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A^k\right)\mathbb{1}_B \quad [2].$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \cap \overline{A} = \overline{A} \cap B.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une expression simplifiée de $X_n \cap A$. On pourra faire une disjonction de cas selon la parité de n.

(d) En déduire la valeur de X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.