Devoir surveillé n° 5 :

Samedi 17 janvier

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A-3I_3)^3$.
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

1. Etudier la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)-\sin(3x)}{x}$.
2. Etudier la limite en 1 de $x \mapsto (2-x)^{1/(x-1)}$.
3. Etudier la limite en 0 de $x \mapsto \dfrac{\lfloor -x \rfloor}{x}$.

Exercice 3 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$ telles que :

$$\sup_{[a,b]}(f) = \sup_{[a,b]}(g).$$

Montrer que :

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = g(c).$$

Problème 1 :
Soit $n \geq 2$.
On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est équitable ssi :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}.$$

Partie 1 : Généralités

1. Donner deux exemples de matrices équitables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A et $-A$ soient équitables.
3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est équitable, alors A^T est équitable.
4. On suppose que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est équitable. Montrer que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,i} = a_{j,j}.$$

On suppose dans toute le suite que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **est une matrice équitable non nulle.**

5. Soit $k \in [\![1,n]\!]$, calculer $a_{k,k}$.
6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice équitable non nulle. Montrer que $A+B$ n'est pas une matrice équitable.
7. Montrer que :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \neq 0.$$
8. (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $a_{i,j}$ à l'aide de $a_{i,1}$ et $a_{j,1}$.
   (b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, exprimer la j-ème colonne de A notée C_j en fonction de la première colonne de A notée C_1.
9. (a) Calculer A^2.
   (b) En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que A n'est pas inversible.
10. Montrer que A est symétrique ssi :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in \{-1,1\}.$$

Partie 2 : Cas particulier $n = 3$.
On admettra que les matrices équitables non nulles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ sont les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{K}^*.$$

Soient $a,b \in \mathbb{K}^*$, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & b & \frac{1}{a} \\ 0 & -1 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix}.$$

11. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
    (b) Calculer $D = P^{-1}AP$.

On pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. (a) Montrer que Q est inversible et calculer Q^{-1}.
    (b) Montrer que $U = QDQ^{-1}$.
13. Montrer qu'il existe $R \in GL_3(\mathbb{K})$ telle que :
$$A = RUR^{-1}.$$

Problème 2 :
On définit deux suites de fonctions par :

$$u_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}, \quad v_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{cccc} u_{n+1} : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{u_n(x) v_n(x)} \\ v_{n+1} : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{u_n(x)+v_n(x)}{2}. \end{array} \right.$$

1. Donner les valeurs des fonctions u_1 et v_1.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on s'intéresse aux suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont des suites à valeurs réelles.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n(x) \leq v_n(x).$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n(x) - u_n(x) \leq \frac{v_1(x) - u_1(x)}{2^{n-1}}.$$
   (c) Montrer que les suites $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   (d) En déduire que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.

On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} v_n(x).$$

On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.
L'objectif de la suite de ce problème est l'étude de la fonction f.

3. (a) Question intermédiaire : soit $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$ soit décroissante.
   Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) i. Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \leq y$. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) \leq u_n(y) \text{ et } v_n(x) \leq v_n(y).$$
   ii. En déduire que f est croissante.
   (c) i. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \left\{ \begin{array}{l} u_n(x) = x u_n(\frac{1}{x}) \\ v_n(x) = x v_n(\frac{1}{x}) \end{array} \right.$$
   ii. En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = x f(\frac{1}{x}).$$
   (d) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} u_n(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) \\ v_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} v_n(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) \end{array} \right.$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{1+x}{2} f(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}).$$
   (c) Montrer que f est continue en 0.
5. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq f(x) \leq \frac{1+x}{2}.$$
   (b) Etudier la dérivabilité de f en 0.
   (c) Etudier la dérivabilité de f en 1.