

Samedi 7 février

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$

Exercice 2 :Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], |f'_n(x)| \leq \frac{1}{n!}.$$

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.**Exercice 3 :**Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto P(x) - e^x \end{aligned}$$

admette une infinité de zéros.

- Montrer que $P \neq 0$.
On pose $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$.
- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ admet au moins $n+2-k$ zéros.
- Que peut-on en conclure?

Exercice 4 :Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(2X) = 2XP'(X)$$

Problème 1 :

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

1. (a) Calculer f' , f'' et f''' .
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme H_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} f^{(n)}(x).$$

On fera apparaître la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = -H'_n + XH_n.$$

Cette relation pourra être utilisée dans la suite du problème.

- (c) Calculer H_0 , H_1 , H_2 , H_3 et H_4 .
- (d) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de H_2 , H_3 et H_4 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Déterminer le degré de H_n .
 - (b) Déterminer le coefficient dominant de H_n .
3. On pose :

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto xe^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $g^{(n)}$ en fonction de $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$.
- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}.$$

- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H'_n = nH_{n-1}.$$

- (d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H''_n - XH'_n + nH_n = 0.$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+2}(0) = -(n+1)H_n(0).$$

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{2n+1}(0) = 0.$$

- (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) On suppose que H_n admet une racine au moins double. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, H_{n-k} admet une racine au moins double.
- (b) En déduire que les racines de H_n sont simples.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, H_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} H_{n-k}.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, H_n(X+a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_{n-k}(a) X^k.$$

- (c) En déduire que :

$$H_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n!}{2^j j! (n-2j)!} X^{n-2j}.$$

Problème 2 :

On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble de celles qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à dérivée continue. On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est L -lipschitzienne, où $L > 0$ est un nombre réel, si elle satisfait :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si elle satisfait :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est convexe si et seulement si sa dérivée f' est croissante.

Dans tout le problème, on se donne $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que f' est L -lipschitzienne, avec $L > 0$ et on fixe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \tau \leq \frac{2}{L}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est toujours définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \tau f'(x_n),$$

déterminée par un terme initial $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose de plus que f est α -convexe avec $\alpha > 0$, c'est-à-dire que :

$$g : x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}\alpha x^2 \text{ est une fonction convexe sur } \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $x \mapsto f'(x) - \alpha x$ est une fonction croissante. En déduire que $\alpha \leq L$.
2. (a) Montrer que $f(x) \geq f(0) + f'(0)x + \alpha \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 (b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 (c) En déduire qu'il existe $x_* \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x_*) \leq f(x).$$

- (d) Déterminer $f'(x_*)$.

3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\alpha|x - y|^2 \leq (f'(x) - f'(y))(x - y).$$

4. (a) Montrer que f est convexe.
 (b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x) - f'(y)|^2 \leq L(x - y)(f'(x) - f'(y)).$$

- (c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, et soient $\tilde{x} = x - \tau f'(x)$ et $\tilde{y} = y - \tau f'(y)$. Montrer que :

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leq |x - y|^2 - \tau(2 - \tau L)(x - y)(f'(x) - f'(y)).$$

- (d) Montrer que la suite $(|x_n - x_*|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

5. On suppose de plus que $\tau < \frac{2}{L}$.

- (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, et soient $\tilde{x} = x - \tau f'(x)$ et $\tilde{y} = y - \tau f'(y)$. Montrer que :

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 \leq |x - y|^2 (1 - \alpha\tau(2 - L\tau)).$$

- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - x_*| \leq \rho^n |x_0 - x_*|$ où ρ est une constante que l'on précisera, et telle que $0 \leq \rho < 1$.
 (c) Conclure.