Programme de révisions :
vacances de Noël

Un exercice de révisions

Travail du cours et/ou préparation des exercices

Deux problèmes facultatifs

Séance 1 :

Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. On pourra effectuer un changement de variable en $\sqrt[6]{x}$.

Solution : $x \mapsto 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1)$

- Relire le cours du chapitre 12, partie I : Ensemble de matrices.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir faire un calcul pratique de produit matriciel → exemple 3
  - ☐ Connaître la définition générale du produit matriciel → exemple 4
  - ☐ Savoir utiliser les symboles de Kronecker → écrire le terme (i,j) de la matrices $E_{r,s}$ (définition 7) et de la matrice I_n (définition 9)
- Refaire l'exercice 7.

Problème 1 : Matrices magiques

L'objectif de ce problème est d'étudier les matrices magiques. Il s'agit de la version matricielle (et beaucoup plus formalisée) des carrés magiques que vous remplissiez à l'école primaire pour apprendre à faire des additions et des soustractions.

Les questions de cette séance concernent la stabilité des ensembles de matrices magiques.

☐ Faire les questions 1. et 2.

Séance 2 :

Déterminer le module et l'argument principal de : $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}-i}$.

Solution : $|z| = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

- Relire le cours du chapitre 12 partie II : Ensemble des matrices carrées.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir calculer une puissance lorsqu'on a l'intuition de la formule → exemple 5
  - ☐ Savoir calculer une puissance avec le binôme de Newton en utilisant des matrices nilpotentes → exemple 6
  - ☐ Savoir calculer une puissance avec le binôme de Newton en utilisant le binôme de Newton scalaire → exemple 7
- Refaire les exercices 12 et 16.

Problème 1 : Matrices magiques

On étudie ici les puissances de matrices magiques.

☐ Faire les questions 3. et 4.

Séance 3 :

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}, \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) + \pi & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}$$

Solution : $f' = 0$ et $\lim_{\pm\infty} f = 0$, $\lim_{(-1)^+} f = \pi + \lim_{(-1)^-} f$
avec $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

- Inutile de retravailler les parties III et IV.
- Relire le cours du chapitre 12 partie V : Matrices inversibles.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir utiliser un polynôme pour calculer un inverse → exemple 10
  - ☐ Savoir calculer l'inverse d'une matrice de "petite" taille → exemple 11
  - ☐ Savoir calculer une puissance en utilisant une relation faisant apparaître des inverses → exemple 12
- Refaire les exercices 27 et 34.

Problème 1 : Matrices magiques

On approfondit ici les résultats sur les puissances de matrices magiques dans les cas particuliers des tailles 3 et 4.

☐ Faire les questions 5. et 6.

Séance 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Solution : $\dfrac{n(4n^2-3n+5)}{6}$

– Relire le cours du chapitre 13 partie I : Limite d'une fonction en un point
– Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir utiliser la caractérisation séquentielle de la limite → exemple 2
  - ☐ Savoir faire un calcul d'une limite usuelle → exemple 3
  - ☐ Savoir faire un calcul de limite faisant apparaître une partie entière → exercice 6
– Préparer les exercices 5 et 8 du chapitre 13.

Problème 2 : Autour du théorème de Césaro

Dans la première question, on étudie une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et on utilise le théorème de Césaro pour obtenir des informations plus précises sur son comportement asymptotique.

Dans la question 2., on utilise le théorème de Césaro pour faire le lien entre la convergence de (x_n) et celle de $(x_{n+1}(x_n)$.

☐ Faire les questions 1. et 2.

Séance 5 :

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$xy' + 2y = \frac{x}{x^2+1}.$$

Solution : $x \mapsto \frac{\lambda}{x^2} + \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

– Relire le cours du chapitre 13 partie II : Continuité en un point
– Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Savoir utiliser la continuité à gauche et à droite → exemple 9
  - ☐ Savoir résoudre une équation fonctionnelle avec un argument de continuité → exemples 10 et 11
– Préparer les exercices 9 et 11 du chapitre 13.

Problème 2 : Autour du théorème de Césaro

On montrera ici que la réciproque du théorème de Césaro est fausse en général mais on trouvera un cas particulier pour lequel elle est vraie.

☐ Faire les questions 3. et 4.

Problème 1 : Matrices magiques

Si n est un entier naturel, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On note $m_{i,j}$ l'élément ligne i et colonne j d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note Id la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle matrice semi-magique d'ordre n, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M),$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M).$$

On appelle trace de M le réel $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.
On note SM_n l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n.
On appelle matrice magique d'ordre n, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes : M est semi-magique et :

$$\sigma(M) = \operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \text{ et } \sigma(M) = \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} m_{i,j}.$$

On note MG_n l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.
Si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.
Un vecteur colonne X non nul sera dit vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si et seulement si $MX = \lambda X$.

1. Montrer que M est semi-magique si et seulement si $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (l'élément ligne i de V est 1) est vecteur propre commun de M et ${}^tM$, associé à la même valeur propre.
2. (a) Montrer que :
$$\forall M, N \in SM_n, \forall \lambda, \mu \in R,\ \lambda M + \mu N \in SM_n,$$
$$\forall M, N \in MG_n, \forall \lambda, \mu \in R,\ \lambda M + \mu N \in MG_n,$$
   (b) Montrer que si M et N sont des matrices semi-magiques d'ordre n alors MN est semi-magique.
3. On désigne par E la matrice à coefficients réels telle que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ e_{i,j} = 1.$$
Montrer que E est magique. Montrer que :
$$\forall p \geq 1,\ E^p = n^{p-1}E.$$
4. Montrer que pour toute matrice semi-magique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$EM = \sigma(M)E = ME.$$
5. Dans cette question, on impose $n = 3$.
On se propose de montrer que si M est magique de MG_3, alors pour tout entier p impair, M^p est magique.
   (a) Soit M une matrice magique de trace nulle.
   On admettra le résultat suivant qu'on ne demande pas de démontrer : il existe un polynôme P du troisième degré $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ tel que $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = 0$. Et de plus, le réel a est égal à $-tr(M)$.
   Montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ entraîne que M est inversible et que la relation démontrée en 4. conduit à une contradiction.
   En déduire l'existence d'un réel λ tel que $M^3 = \lambda M$ et que pour tout entier p impair, M^p est magique.
   (b) Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(M)E$. Calculer M^p et montrer que pour tout entier impair M^p est magique.
6. Dans cette question, on impose $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que $A^2 = A + 2Id$.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que :
$$A^p = a_p A + b_p Id.$$
   (c) Démontrer que pour tout $p \geq 2$, A^p ne peut pas être magique.

Problème 2 : Autour du théorème de Césaro

A toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On admet le théorème de Césaro (exemple 5 du cours) : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

1. On considère la suite définie par :

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

   (d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n+1}.$$

   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}.$$

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

   (f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n, x_{n+1} et x_1. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} n x_n = 1.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle.

   (a) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   (b) On suppose que la suite $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel l.

      i. Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

      ii. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le cas où $l \neq 0$.

      iii. Dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente ?

3. Dans cette question, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n.$$

   (a) Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Conclure quand à la validité de la réciproque de la proposition énoncée à la question 1.(b).

4. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

   (a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$n u_{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq 2v_{2n} - v_n$.

   (c) Etablir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la limite.

   (d) Qu'a-t-on démontré ?