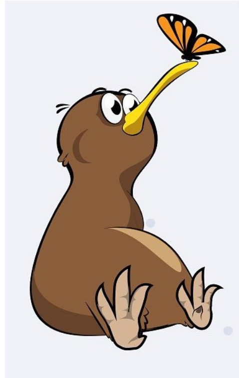
Programme de révisions :
vacances de printemps

Trois exercices **courts** posés aux oraux des concours classés par difficulté :

Cours et exercices sur le chapitre de dénombrement

DM10 ou problème facultatif



Séance 1 :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$.

En trouvant deux manières de faire le développement limité de $(e^x - 1)^n$ en 0, montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \delta_{m,n} n!$ pour tout $m \in [[0, n]]$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. Montrer que A est semblable à B.

- Relire le cours du chapitre 21, partie I : Cardinal d'un ensemble fini.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Connaître les hypothèses permettant d'avoir des inégalités sur les cardinaux → exercice 2
  - ☐ Connaître les formules des différents cardinaux → exercices 1, 7 et 8

Faire la question 1. du problème sur la formule de quadrature.

Séance 2 :

Soit $\zeta = e^{i\pi/10}$. Montrer que ζ est racine de $X^8 - X^6 + X^4 - X^2 + 1$.

Déterminer la valeur moyenne de $t \mapsto (\cos t)^{100}$.

Solution : $\frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50}$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que y possède une infinité d'antécédents par f.

- Relire le cours du chapitre 21, partie II : Listes et combinaisons.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Connaître les situations faisant apparaître des p-uplets d'éléments deux à deux distincts → exemples 2,3 et 4
  - ☐ Connaître les situations faisant apparaître des parties → exemples 5,6 et 8
  - ☐ Savoir interpréter les situations données, avec l'ai de de la fiche Dénombrement → exemple 7 et exercices 9 et 10

Faire la question 2. du problème sur la formule de quadrature.

Séance 3 :

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

Solution : $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \leqslant g$ et $f(a) = g(a)$. Montrer que les tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse a sont égales.

Soit (x_n) une suite réelle positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{1}{n^2}$. Montrer que la suite (x_n) converge.

Préparer les exercices 11, 15 et 18 du chapitre 21.

Faire la question 3. du problème sur la formule de quadrature.

Séance 4 :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}$. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution : $u_n = \left(\frac{n^2-n+2}{2}\right)^{1/(n-1)}$

Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x^{(x+1)/x} - x^{x/(x-1)}$.

Solution : 0

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts.
Montrer qu'il existe $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\forall P \in E,\ \int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} c_k P(a_k)$.

Faire le problème 1 du DM10.

Séance 5 :

Déterminer la limite de $(3^x - 3 \times 2^x - 2)^{\tan(\pi x/6)}$ quand x tend vers 3.

Solution : $\exp\left(\frac{6}{\pi}(24\ln 2 - 27\ln 3)\right)$

On considère $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0, \dots, x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, y_0', \dots, y_n, y_n'$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant $\forall k \in \{0, \dots, n\},\ H(x_k) = y_k$ et $H'(x_k) = y_k'$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f''(c) = 2$.

Faire le problème 2 du DM10.

Séance 6 :

1. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ quand n tend vers l'infini.
2. Déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{n+k})$ quand n tend vers l'infini.

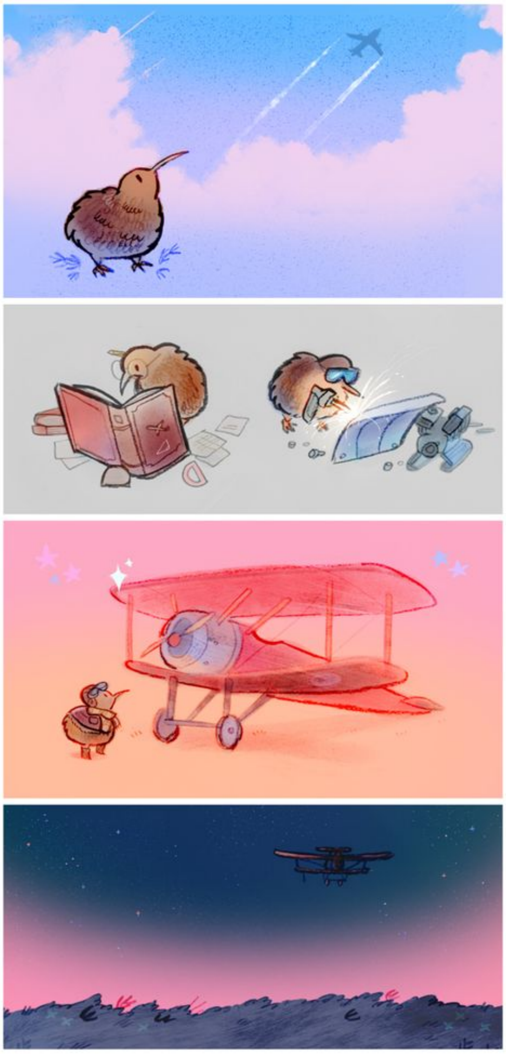
Solution : 1. ln(2), 2. ln(2)

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'\sin x + y\cos x = \sin^2 x$?

Solution : Non

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)P''(x) \leqslant P'(x)^2$.

- Relire le cours du chapitre 22.
- Vérifier que les points suivants sont acquis :
  - ☐ Connaître le vocabulaire probabiliste.
  - ☐ Connaître la définition et les propriété d'une probabilité.
  - ☐ Savoir faire le lien entre le calcul de probabilité et les méthodes de dénombrement → exemples 1 et 2
- Préparer l'exercice 3 du chapitre 22.



Problème : Formule de quadrature

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit w est une fonction continue et strictement positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que w est *un poids* sur $[a, b]$.
Etant donné une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on cherche à approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)w(x)dx$ par une expression de la forme

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ sont $n+1$ points distincts dans $[a, b]$.
Une telle expression $I_n(f)$ est appelée *formule de quadrature* et on note

$$e(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

l'*erreur de quadrature* associée.
Etant donné un entier $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On dit qu'une formule de quadrature $I_n(f)$ est *exacte sur* $\mathbb{R}_m[X]$ si,

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad e(P) = 0,$$

ce qui signifie que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à m,

$$\int_a^b P(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j).$$

Enfin, on appelle *ordre d'une formule de quadrature* $I_n(f)$ le plus grand entier $m \in \mathbb{N}$ pour lequel la formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$.

1. *Exemples élémentaires*
   On se place dans le cas $a = 0$, $b = 1$ et $\forall x \in [0, 1]$, $w(x) = 1$. On cherche donc à approcher $\int_0^1 f(x)dx$ lorsque f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer l'ordre de la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ et représenter graphiquement l'erreur associée $e(f)$.
   (b) Faire de même avec la formule de quadrature $I_0(f) = f(1/2)$.
   (c) Déterminer les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ pour que la formule $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ soit exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$. Cette formule de quadrature est-elle d'ordre 2 ?
2. *Construction de formules d'ordre quelconque*
   On revient au cas général.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $n+1$ points distincts dans $I[a, b]$, notés $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, et une fonction continue f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
   (b) Montrer que, pour tout $i \in [[0, n]]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in [[0, n]], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

   (c) Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Cette base est appelée *base de Lagrange associée aux points* $(x_0, \ldots, x_n)$.
   (d) Montrer que la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si, et seulement si,

$$\forall j \in [[0, n]], \quad \lambda_j = \int_a^b L_j(x)w(x)dx.$$

   (e) On se place dans le cas $I = [0, 1]$ et $\forall x \in I$, $w(x) = 1$. Déterminer la base de Lagrange associée aux points $(0, 1/2, 1)$ et retrouver ainsi les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de la question 1c.

3. *Evaluation de l'erreur dans un cas particulier*
   On se place dans le cas $\forall x \in [a,b],\ w(x)=1$.
   Les questions 1c et 2d montrent que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 Q(x)\,dx = \frac{1}{6}\left(Q(0)+Q(1)+4Q(1/2)\right).$$

   On considère que $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$. Soient $c,d \in [a,b]$ tels que $c<d$.

   (a) En utilisant le changement de variable $y=(d-c)x+c$, montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_c^d P(y)\,dy = \frac{d-c}{6}\left(P(c)+P(d)+4P\left(\frac{c+d}{2}\right)\right).$$

   (b) On pose :

$$\Phi : \begin{array}{ccl} [0,d-c] & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \int_c^{c+h} f(y)\,dy - \frac{h}{6}\left(f(c)+f(c+h)+4f\left(c+\frac{h}{2}\right)\right). \end{array}$$

   i. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,d-c]$ et calculer Φ', Φ'' et Φ'''.
   ii. Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de c et d telle que :

$$\forall h \in [0,d-c],\ |\Phi'''(h)| \leq Mh.$$

   iii. En déduire que :

$$\forall h \in [0,d-c],\ |\Phi''(h)| \leq \frac{M}{2}h^2.$$

   iv. En procédant de même, établir que :

$$\left|\int_c^d f(y)\,dy - \frac{(d-c)}{6}\left(f(c)+f(d)+4f\left(\frac{c+d}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{24}(d-c)^4.$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ f_i = f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(i+1)\frac{b-a}{n}\right)+4f\left(a+(i+1/2)\frac{b-a}{n}\right).$$

   Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de n telle que :

$$\left|\int_a^b f(y)\,dy - \frac{b-a}{6n}\sum_{i=0}^{n-1} f_i\right| \leq \frac{M}{24n^3}(b-a)^4.$$