

Corrections : vacances de printemps



Problème : Formule de quadrature

1. (a) • Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a$.
On a $I_0(P) = P(0) = a$ et $\int_0^1 P(x) dx = a$. Donc :

$$I_0(P) = \int_0^1 P(x) dx.$$

- Posons $P = X$, on a : $I_0(P) = P(0) = 0$ et $\int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{2}$. Donc :

$$I_0(P) \neq \int_0^1 P(x) dx.$$

- Ainsi la formule de quadrature $I_0(f) = f(0)$ est d'ordre 0.

- (b) • Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX + b$.

On a $I_0(P) = P(\frac{1}{2}) = \frac{a}{2} + b$ et $\int_0^1 P(x) dx = \left[a\frac{x^2}{2} + bx \right]_0^1 = \frac{a}{2} + b$. Donc :

$$I_0(P) = \int_0^1 P(x) dx.$$

- Posons $P = X^2$, on a : $I_0(P) = P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ et $\int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{3}$. Donc :

$$I_0(P) \neq \int_0^1 P(x) dx.$$

- Ainsi la formule de quadrature $I_0(f) = f(\frac{1}{2})$ est d'ordre 1.

- (c) • Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} I_2(P) = \int_0^1 P(x) dx &\iff \lambda_0 c + \lambda_1 \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \right) + \lambda_2 (a + b + c) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \\ &\iff a \left(\frac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 - \frac{1}{3} \right) + b \left(\frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \frac{1}{2} \right) + c (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Donc, la formule est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ ssi :

$$(S) \begin{cases} \frac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Or :

$$(S) \iff \begin{cases} -\frac{\lambda_1}{4} + \frac{1}{6} = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{3} \\ \lambda_2 = \frac{1}{6} \\ \lambda_0 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

- Posons $P = X^3$, $I_2(P) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^3 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ et $\int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{4}$ donc $I_2(P) = \int_0^1 P(x) dx$.
• Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} I_2(P) &= aI_2(X^3) + I_2(bX^2 + cX + d) \\ &= a \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 (bx^2 + cx + d) dx \\ &= \int_0^1 P(x) dx. \end{aligned}$$

- Posons $P = X^4$, $I_2(P) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{6})^4 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{5}{24}$ et $\int_0^1 P(x) dx = \frac{1}{5}$ donc $I_2(P) \neq \int_0^1 P(x) dx$.
- Ainsi la formule est d'ordre 3.

2. (a) • φ est clairement linéaire.
 • Soit $P \in \ker \varphi$. Alors $P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$ donc P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or $\deg P \leq n$ donc $P = 0$.

Ainsi $\ker \varphi = \{0\}$ donc φ est injective.

- $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$.
- Donc φ est un isomorphisme.

- (b) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases} \iff \varphi(L_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0) \text{ (le 1 étant en position } i) \\ \iff L_i = \varphi^{-1}(0, \dots, 1, \dots, 0).$$

D'où l'existence et l'unicité de L_i .

- (c) Soit (e_0, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . On a : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.

Or, (e_0, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n et φ^{-1} est un isomorphisme.

Ainsi : $(L_0, \dots, L_n) = (\varphi^{-1}(e_0), \dots, \varphi^{-1}(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- (d)

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b P(x)\omega(x) dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x_j) \iff \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_a^b L_i(x)\omega(x) dx = \sum_{j=0}^n \lambda_j L_i(x_j)$$

car (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et $P \mapsto \int_a^b P(x)\omega(x) dx, P \mapsto \sum_{j=0}^n \lambda_j P(x_j)$ sont linéaires.

$$\iff \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_a^b L_i(x)\omega(x) dx = \lambda_i$$

$$\iff \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_j = \int_a^b L_j(x)\omega(x) dx.$$

- (e) • L_0 est de degré inférieur ou égal à 2 et admet $\frac{1}{2}$ et 1 comme racines donc $L_0 = \lambda(X - \frac{1}{2})(X - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 De plus $L_0(0) = 1$ donc $\lambda = 2$. Ainsi :

$$L_0 = 2(X - \frac{1}{2})(X - 1) = 2X^2 - 3X + 1.$$

- L_1 est de degré inférieur ou égal à 2 et admet 0 et 1 comme racines donc $L_1 = \lambda X(X - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 De plus $L_1(\frac{1}{2}) = 1$ donc $\lambda = -4$. Ainsi :

$$L_1 = -4X - (X - 1) = -4X^2 + 4X.$$

- L_2 est de degré inférieur ou égal à 2 et admet 0 et $\frac{1}{2}$ comme racines donc $L_2 = \lambda X(X - \frac{1}{2})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 De plus $L_2(1) = 1$ donc $\lambda = 2$. Ainsi :

$$L_2 = 2X(X - \frac{1}{2}) = 2X^2 - X.$$

- $\lambda_0 = \int_0^1 L_0(x) dx = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{6}$
- $\lambda_1 = \int_0^1 L_1(x) dx = -\frac{4}{3} + \frac{4}{2} = \frac{2}{3}$
- $\lambda_2 = \int_0^1 L_2(x) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On effectue le changement de variable $y = (d - c)x + c$, on a $dy = (d - c)dx$.

$$\int_c^d P(y) dy = \int_0^1 P((d - c)x + c) \cdot (d - c) dx \\ = (d - c) \int_0^1 Q(x) dx \text{ où } Q(X) = P((d - c)X + c) \in \mathbb{R}_2[X] \\ = \frac{d - c}{6} \left(Q(0) + Q(1) + 4Q\left(\frac{1}{2}\right) \right) \\ = \frac{d - c}{6} \left(P(c) + P(d) + 4P\left(\frac{c + d}{2}\right) \right).$$

- (b) i. • f est \mathcal{C}^3 donc $h \mapsto \int_c^{c+h} f(y) dy$ est \mathcal{C}^3 et $h \mapsto f(c + \frac{h}{2})$ est \mathcal{C}^3 , donc Φ est \mathcal{C}^2 sur $[0, d - c]$.
 • Soit $h \in [0, d - c]$,

$$\Phi'(h) = f(c + h) - \frac{1}{6}(f(c) + f(c + h) + 4f(c + \frac{h}{2})) - \frac{h}{6}(f'(c + h) + 2f'(c + \frac{h}{2})) \\ = -\frac{1}{6}(f(c) - 5f(c + h) + 4f(c + \frac{h}{2})) - \frac{h}{6}(f'(c + h) + 2f'(c + \frac{h}{2}))$$

$$\begin{aligned}\Phi''(h) &= \frac{5}{6}f'(c+h) - \frac{1}{3}f'(c+\frac{h}{2}) - \frac{1}{6}(f'(c+h) + 2f'(c+\frac{h}{2})) - \frac{h}{6}(f''(c+h) + f''(c+\frac{h}{2})) \\ &= \frac{2}{3}f'(c+h) - \frac{2}{3}f'(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f''(c+h) + f''(c+\frac{h}{2}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'''(h) &= \frac{2}{3}f''(c+h) - \frac{1}{3}f''(c+\frac{h}{2}) - \frac{1}{6}(f''(c+h) + f''(c+\frac{h}{2})) - \frac{h}{6}(f'''(c+h) + f'''(c+\frac{h}{2})) \\ &= \frac{1}{2}f''(c+h) - \frac{1}{2}f''(c+\frac{h}{2}) - \frac{h}{6}(f'''(c+h) + f'''(c+\frac{h}{2}))\end{aligned}$$

- ii. • f est \mathcal{C}^3 sur le segment $[a, b]$ donc f''' est continue sur le segment $[a, b]$. Donc, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [a, b], |f'''(x)| \leq k$.
 • De plus, d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall x, y \in [a, b], |f''(x) - f''(y)| \leq k|x - y|$.
 • Ainsi, soit $h \in [0, d - c]$,

$$\begin{aligned}|\Phi'''(h)| &\leq \frac{1}{2}h|(c+h) - (c+\frac{h}{2})| + \frac{h}{6}(k + \frac{1}{2}k) \\ &\leq \frac{kh}{4} + \frac{kh}{4} \\ &\leq MH \text{ avec } m = \frac{k}{2}.\end{aligned}$$

iii. Soit $h \in [0, d - c]$,

$$\begin{aligned}|\Phi''(h) - \Phi''(0)| &= \left| \int_0^h \Phi'''(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^h |\Phi'''(t)| dt \\ &\leq \int_0^h Mt dt = \frac{Mh^2}{2}.\end{aligned}$$

Or $\Phi''(0) = 0$ donc :

$$|\Phi''(h)| \leq \frac{M}{2}h^2.$$

- iv. • Soit $h \in [0, d - c]$, on a $\Phi'(0) = 0$ donc :
 $|\Phi'(h)| = \left| \int_0^h \Phi''(t) dt \right| \leq M \int_0^h \frac{t^2}{2} dt \leq \frac{Mh^3}{6}$.
 • Soit $h \in [0, d - c]$, on a $\Phi(0) = 0$ donc :
 $|\Phi(h)| = \left| \int_0^h \Phi'(t) dt \right| \leq M \int_0^h \frac{t^3}{6} dt \leq \frac{Mh^4}{24}$. Ainsi : $|\Phi(d - c)| \leq \frac{M(d-c)^4}{24}$.

Donc :

$$\left| \int_c^d f(y) dy - \frac{(d-c)}{6} \left(f(c) + f(d) + 4f\left(\frac{c+d}{2}\right) \right) \right| \leq \frac{M}{24}(d-c)^4.$$

(c) Posons : $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, c_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $d_i = a + (i+1)\frac{b-a}{n}$.

Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, comme $\frac{c_i+d_i}{2} = a + (i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$, on a, d'après la question précédente :

$$\left| \int_{c_i}^{d_i} f(y) dy - \frac{b-a}{6n} \left(f(c_i) + f(d_i) + 4f\left(a + (i+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right) \right) \right| \leq \frac{M(b-a)^4}{24n^4}.$$

De plus, $c_0 = a, \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, d_i = c_{i+1}, d_{n-1} = b$, donc : $\int_a^b f(y) dy = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i}^{d_i} f(y) dy$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(y) dy - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} f_i \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{c_i}^{d_i} f(y) dy - \frac{b-a}{6n} f_i \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{c_i}^{d_i} f(y) dy - \frac{b-a}{6n} f_i \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^4}{24n^4} \\ &\leq \frac{M(b-a)^4}{24n^3}\end{aligned}$$