

## Correction : Séance 1

### Correction de la séance 1



Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f + f^4 = 0$ . Montrer que  $\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$ .



- D'après le théorème du rang :  $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim(E)$ .
- Soit  $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ . Il existe  $z \in E$  tel que  $x = f(z)$  et  $f(x) = 0$ .  
Donc  $f^2(z) = f(0) = 0$  et ainsi  $f^4(z) = f^2(f^2(z)) = 0$ .  
Ainsi  $-f(z) = 0$  donc  $x = 0$ . D'où :  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ .
- Ainsi :

$$\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E.$$

### Correction de la séance 1



En trouvant deux manières de faire le développement limité de  $(e^x - 1)^n$  en 0, montrer que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \delta_{m,n} n! \text{ pour tout } m \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$



On a :  $(e^x - 1)^n \sim x^n$  donc  $(e^x - 1)^n = x^n + o(x^n) = \sum_{m=0}^n \delta_{m,n} x^m + o(x^n)$ .

De plus :

$$\begin{aligned} (e^x - 1)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left( \sum_{m=0}^n \frac{(kx)^m}{m!} + o(x^n) \right) \\ &= \sum_{m=0}^n \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^m \right) \frac{x^m}{m!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Donc, par unicité du développement limité :

$$\forall m \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \delta_{m,n} n!$$

### Correction de la séance 1



Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = A$ ,  $B^2 = B$  et  $\text{rg } A = \text{rg } B$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $B$ .



Soient  $f$  et  $g$  les endomorphismes canoniquement associés à  $A$  et  $B$ .

On a  $f^2 = f$  et  $g^2 = g$  donc  $f$  et  $g$  sont des projecteurs.

Soient  $F$  et  $G$  des espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^n$  tels que  $f$  soit la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

On a  $F = \text{Im } f$  donc  $\dim F = \text{rg } f = \text{rg } A = r$ .

Soit  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ) une base de  $F$  (resp. de  $G$ ), alors, comme  $F \oplus G = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Et comme :  $\forall x \in F, f(x) = x$  et  $\forall x \in G, f(x) = 0$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = J,$$

où figure  $r$  fois le nombre 1.

De même, il existe  $\mathcal{C}$  base de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = J$ .

Donc  $A$  et  $B$  sont semblables à  $J$  donc  $A$  et  $B$  sont semblables.