Correction : Séance 2

Correction de la séance 2 :

Soit $\zeta = e^{i\pi/10}$. Montrer que ζ est racine de $X^8 - X^6 + X^4 - X^2 + 1$.

Posons $P = X^8 - X^6 + X^4 - X^2 + 1$. On a :

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= \zeta^8 - \zeta^6 + \zeta^4 - \zeta^2 + 1 \\ &= \left((-\zeta)^2\right)^4 + \left((-\zeta)^2\right)^3 + \left((-\zeta)^2\right)^2 + \left((-\zeta)^2\right)^1 + \left((-\zeta)^2\right)^0 \\ &= \sum_{k=0}^{4} (-\zeta^2)^k = \frac{1-(-\zeta^2)^5}{1+\zeta^2} = \frac{1+\zeta^{10}}{1+\zeta^2}. \end{aligned}$$

Or $\zeta^{10} = e^{i\pi} = -1$ donc :

$$P(\zeta) = 0.$$

Correction de la séance 2 :

Déterminer la valeur moyenne de $t \mapsto (\cos t)^{100}$.

On pose $f : t \mapsto (\cos t)^{100}$ la fonction étudiée. f est 2π-périodique donc sa valeur moyenne est : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\cos t)^{100} = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} e^{ikt} e^{-it(100-k)} = \frac{1}{2^{100}} \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} e^{i(2k-100)t}.$$

- Soit $k \in [\![0,100]\!] \setminus \{50\}$, alors $2k - 100 \neq 0$ donc :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(2k-100)t}\,dt = \left[\frac{e^{i(2k-100)t}}{2k-100}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

- Soit $k = 50$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(2k-100)t}\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^{100}} \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \int_0^{2\pi} e^{-it(100-k)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50} 2\pi = \frac{1}{2^{100}}\binom{100}{50}.$$

Correction de la séance 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que y possède une infinité d'antécédents par f.

Supposons qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ n'ayant qu'un nombre fini d'antécédents par f. Soit x_0 le plus grand d'entre eux.
Posons $g : x \mapsto f(x) - y_0$.
On a : $\forall x > x_0,\ f(x) \neq y_0$ donc g ne s'annule pas sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$. De plus, comme g est continue, elle est de signe constant sur $]x_0, +\infty[$ (théorème des valeurs intermédiaires).
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $g > 0$ sur $]x_0, +\infty[$. Ainsi : $\forall x \in]x_0, +\infty[,\ f(x) > y_0$.
La fonction f étant continue sur le segment $[0, x_0]$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0, x_0],\ f(x) \geq m$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq \min(m, y_0)$. Donc tout nombre réel $y < \min(m, y_0)$ n'a pas d'antécédent par f, ce qui contredit la surjectivité de f.
Montrer, pour tout $y \in \mathbb{R}$, y possède une infinité d'antécédents par f.