Correction : Séance 3

Correction de la séance 3 :

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

- Analyse : Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$, on a :
  - en évaluant en 0, $4P(0) = 0$ donc $P(0) = 0$,
  - en évaluant en -1, $3P(-1) = -P(0) = 0$ donc $P(-1) = 0$,
  - en évaluant en -2, $2P(-2) = -2P(-1) = 0$ donc $P(-2) = 0$,
  - en évaluant en -3, $P(-3) = -3P(-2) = 0$ donc $P(-3) = 0$.

  donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$.
  De plus $(X+4)P(X) = XP(X+1)$ donc : $X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1)$
  $$Q(X) = Q(X+1).$$
  D'où $Q(X) - Q(0) = Q(X+1) - Q(0)$ donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) - Q(0) = 0$ donc $Q - Q(0)$ admet une infinité de racines, ainsi $Q - Q(0) = 0$ donc Q est constant.
  Donc :
  $$P\lambda X(X+1)(X+2)(X+3),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$
- Synthèse : Posons $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
  $$(X+4)P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4) = XP(X+1).$$
  Donc P convient.
- Conclusion : Les solutions sont les polynômes de la forme $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de la séance 3 :

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $f \leqslant g$ et $f(a) = g(a)$. Montrer que les tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse a sont égales.

Les tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse a ont pour équations respectives : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ et $y = g'(a)(x-a) + g(a)$. Comme $f(a) = g(a)$, il suffit de montrer que $f'(a) = g'(a)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

- Si $x > a$,
  $$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{g(x) - f(a)}{x-a} = \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$
  Donc :
  $$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \lim_{x \to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$
  Et comme f et g sont dérivables en a : $f'(a) \leq g'(a)$.
- Si $x < a$,
  $$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \geq \frac{g(x) - f(a)}{x-a} = \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$
  Donc :
  $$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \geq \lim_{x \to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$
  Et comme f et g sont dérivables en a : $f'(a) \geq g'(a)$.

Ainsi :
$$f'(a) = g'(a).$$
Donc les tangentes à C_f et C_g au point d'abscisse a sont égales.

Correction de la séance 3 :

Soit (x_n) une suite réelle positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} \leqslant x_n + \frac{1}{n^2}$. Montrer que la suite (x_n) converge.

Soit $n \geq 2$, on a :

$$x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n(n-1)} = x_n + \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = x_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Donc :

$$x_{n+1} + \frac{1}{n} \leq x_n + \frac{1}{n-1}.$$

Ainsi, la suite $(x_n + \frac{1}{n-1})$ est décroissante et positive. Elle est donc convergente.
Comme $\left(\frac{1}{n-1}\right)$ est convergente, la suite $(x_n)_n$ est convergente.