


## Correction : Séance 4

### Correction de la séance 4

 Soit  $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$  définie par  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

On pose  $v_n = u_n^{n-1}$ . La suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est définie par :  $v_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_{n+1} = n + v_n$ .  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n-1} k.$$


Ainsi, par somme télescopique :

$$v_n - v_1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

D'où

$$u_n = \left( \frac{n(n-1)}{2} + 1 \right)^{1/(n-1)} = \left( \frac{n^2 - n + 2}{2} \right)^{1/(n-1)}.$$

### Correction de la séance 4


 Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto x^{(x+1)/x} - x^{x/(x-1)}$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x\right) - \exp\left(\frac{1}{1 - 1/x} \ln x\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x\right) - \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \ln x\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x\right) \left(1 - \exp\left(\frac{\ln x}{x^2} + o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \left(1 - \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} + o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) \left(-\frac{\ln x}{x^2} + o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right). \end{aligned}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$  et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

#### Correction de la séance 4

 Soient  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $a_0, \dots, a_n$  des réels distincts.

Montrer qu'il existe  $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\forall P \in E, \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$ .



– Posons :  $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P$  et, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\varphi_i : P \mapsto P(a_i)$ .

On a :  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$  et  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\varphi_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ .

–  $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) = n + 1 = \text{Card}(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ .

– Montrons que  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est libre.

Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que :  $\sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_i = 0$ . Alors :  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i) = 0$ .

Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Posons  $P_j = \prod_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{j\}} (X - a_k)$ . On a  $P_j(a_i) = 0$  si  $i \neq j$  et  $P_j(a_j) \neq 0$ .

Ainsi :  $0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i P_j(a_i) = \lambda_j P_j(a_j)$ .

Donc  $\lambda_j = 0$  et ainsi la famille  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est libre.

– Donc  $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ .

– Ainsi, il existe  $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $\varphi = \sum_{k=0}^n \varphi_k c_k$  c'est-à-dire :  $\forall P \in E, \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n c_k P(a_k)$ .