Correction : Séance 5

Correction de la séance 5 :

Déterminer la limite de $(3^x - 3\times 2^x - 2)^{\tan(\pi x/6)}$ quand x tend vers 3.

Posons $h = x-3$,

$$f(x) = \exp\left((\tan(\pi x/6))\ln(3^x - 3\times 2^x -)\right) = \exp\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{6}\right)\ln\left(27e^{h\ln 3} - 24e^{h\ln 2} - 2\right)\right).$$

Or :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{6}\right) = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi h}{6}\right)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{6}{\pi h}.$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\ln\left(27e^{h\ln 3} - 24e^{h\ln 2} - 2\right) &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(27e^{h\ln 3} - 24e^{h\ln 2} - 2\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \ln\left(27\left(1+h\ln 3 + o(h)\right) - 24\left(1+h\ln 2+o(h)\right) - 2\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \ln\left(1 + (27\ln 3 - 24\ln 2)h + o(h)\right)\\
&= (27\ln 3 - 24\ln 2)h + o(h)\\
&\underset{h\to 0}{\sim} (27\ln 3 - 24\ln 2)h.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{6}\right)\ln\left(27e^{h\ln 3} - 24e^{h\ln 2} - 2\right) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{6(27\ln 3 - 24\ln 2)}{\pi}.$$

Et donc :

$$\lim_{x\to 3}\exp\left((\tan(\pi x/6))\ln(3^x - 3\times 2^x -)\right) = \exp\left(\frac{6}{\pi}(24\ln 2 - 27\ln 3)\right)$$

Correction de la séance 5 :

On considère $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0,\dots,x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, y_0', \dots, y_n, y_n'$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant $\forall k\in\{0,\dots,n\},\ H(x_k) = y_k$ et $H'(x_k) = y_k'$.

On pose :

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{2n+1}[X] & \to & \mathbb{C}^{2n+2} \\ P & \mapsto & (P(x_0),\dots,P(x_n),P'(x_0),\dots,P'(x_n)). \end{array}$$

- Φ est clairement linéaire.
- Soit $P\in\ker(\Phi)$, alors $\Phi(P) = (0,\dots,0)$ alors pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, le nombre x_k est racine au moins double de P et comme $x_0,\dots,x_n$ sont distincts, P admet au moins $2n+2$ racines comptées avec leur multiplicité. Or $\deg(P)\le 2n+1$ donc $P=0$.
  Ainsi $\ker(\Phi) = \{0\}$ et Φ est injective.
- Comme $\dim \mathbb{C}_{2n+1}[X] = 2n+2 = \dim \mathbb{C}^{2n+2}$, l'application est Φ bijective.
- Donc il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ tel que $\Phi(H) = P$ c'est-à-dire : $\forall k \in \{0,\dots,n\},\ H(x_k) = y_k$ et $H'(x_k) = y_k'$.

Correction de la séance 5 :

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f''(c)=2$.

On pose $g : x \mapsto f(x) - x^2$. On a $g(0) = g(1) = 0$.
Comme g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $a \in]0,1[$ tel que $g'(a) = 0$.
Or $\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = f'(x) - 2x$ et donc $g'(0) = g'(a) = 0$.
Comme g' est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g''(c) = 0$, soit tel que $f''(c) = 2$.