Correction : Séance 6

Correction de la séance 6 :

1. Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ quand n tend vers l'infini.
2. Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{n+k})$ quand n tend vers l'infini.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$, avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0,1]$.
   Donc, par somme de Riemann :
   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 f(x)\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$
2. Comme $\ln(1+\frac{1}{n+k}) = \ln(n+k+1) - \ln(n+k)$, on obtient, par télescopage :
   $$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{n+k}) = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\frac{2n+1}{n+1}.$$
   Ainsi :
   $$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{n+k}) = \ln 2.$$

Correction de la séance 6 :

Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'\sin x + y\cos x = \sin^2 x$?

- Soit $k \in \mathbb{Z}$, on résout : $y' + \frac{\cos x}{\sin x} y = \sin x$ sur $]k\pi,(k+1)\pi[\quad (E_k)$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $]k\pi,(k+1)\pi[$ est $x \mapsto \ln|\sin x|$.
  Ainsi les solutions de $y' + \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$ sur $]k\pi,(k+1)\pi[$ sont : $x \mapsto \lambda_k e^{-\ln|\sin x|} = \frac{\lambda_k}{|\sin x|}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, soit :
  $$x \mapsto \frac{\lambda_k}{\sin x},\ \lambda_k \in \mathbb{R}.$$
- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E_k) de la forme $y : x \mapsto \frac{\lambda_k(x)}{\sin x}$, avec λ_k dérivable. On a :
  $$\begin{aligned} y' + \frac{\cos x}{\sin x} y = \sin x &\iff \forall x \in]k\pi,(k+1)\pi[,\ \frac{\lambda_k'(x)}{\sin x} = \sin x \\ &\iff \forall x \in]k\pi,(k+1)\pi[,\ \lambda'(x) = \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$
  Donc : $\lambda_k : x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$ convient et $y : x \mapsto \frac{\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}}{\sin x} = \frac{x}{2\sin x} - \frac{\cos x}{2}$ est solution particulière de (E).
- Donc les solutions de (E_k) sont :
  $$y : x \mapsto (\frac{x}{2} + \lambda_k)\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{2}.$$

Or y a une limite finie en $k\pi^+$ ssi $\lambda_k = -\frac{k\pi}{2}$ et y a une limite finie en $((k+1)\pi)^-$ ssi $\lambda_k = -\frac{(k+1)\pi}{2}$. Donc y n'a pas de limite finie en $k\pi^+$ et en $((k+1)\pi)^-$.
Ainsi, il n'y a pas de solution continue sur $\mathbb{R}$.
Donc l'équation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Correction de la séance 6 :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)P''(x) \leqslant P'(x)^2$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines réelles simples de P. La décomposition en éléments simples de $F = \frac{P'}{P}$ est de la forme :

$$F = \frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - \lambda_k},$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$, en multipliant par $X - \lambda_k$ et en évaluant en λ_k, on a :

$$\alpha_k = \frac{P'(\lambda_k)}{\prod\limits_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} (X - \lambda_j)}.$$

Or : $P = (X - \lambda_k)Q$ où $Q = \prod\limits_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} (X - \lambda_j)$ ainsi : $P' = Q + (X - \lambda_k)Q'$. Donc $P'(\lambda_k) = Q(\lambda_k)$ et donc : $\alpha_k = 1$.

Ainsi :

$$F = \frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda_k}.$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},\quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_k}$. Ainsi, en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},\ \frac{P''(x)P(x) - (P')^2(x)}{P(x)^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - \lambda_k)^2} \leqslant 0.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},\ P''(x)P(x) \leqslant (P')^2(x)$. De plus, cette inégalité est vraie pour $x \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ car $P(x) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)P''(x) \leqslant P'(x)^2.$$