

# Indications : vacances de printemps



## Indications pour la séance 1 :



Montrer que  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$  et utiliser le théorème du rang.



Passer par un équivalent pour obtenir un premier développement limité de  $(e^x - 1)^n$  et par le binôme de Newton pour le second.



Remarquer que les endomorphismes canoniquement associés à  $A$  et  $B$  sont des projecteurs et écrire leurs matrices dans des bases adaptées.

## Indications pour la séance 2 :



Remarquer que  $P(\zeta)$  est une somme géométrique et que  $zeta^0 = -1$ .



Utiliser les formules d'Euler et du binôme de Newton pour se ramener au calcul d'une somme d'intégrales d'exponentielles complexes.



Raisonner par l'absurde et considérer le plus grand des antécédents de  $y$ .

## Indications pour la séance 3 :



Raisonner par analyse-synthèse et faire des évaluations pour trouver 4 racines de  $P$ .



Avec des inégalités et des passages à la limite, montrer que  $f'(a) = g'(a)$ .



Introduire la suite de terme général  $x_n + \frac{1}{n-1}$ .

## Indications pour la séance 4 :



Calculer le terme général de la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n^{n-1}$  en utilisant une somme télescopique.



Utiliser un développement limité.



Chercher une base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ .

### Indications pour la séance 5 :



Utiliser des équivalents quand c'est possible et des développements limités sinon.



Montrer qu'une application linéaire bien choisie est un automorphisme.



Appliquer deux fois le théorème de Rolle a une fonction bien choisie.

### Indications pour la séance 6 :



1. Reconnaître une somme de Riemann.
2. Reconnaître une somme télescopique.



Résoudre sur  $]k\pi, (k+1)\pi[$  avec la méthode de variation de la constante et essayer de recoller.



Déterminer la décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ .

---

## Problème : Formule de quadrature

---

1. (a) Calculer  $I_0(P)$  pour  $P \in \mathbb{R}_0[X]$  et  $I_0(X)$ .  
(b) Calculer  $I_0(P)$  pour  $P \in \mathbb{R}_1[X]$  et  $I_0(X^2)$ .  
(c) Calculer  $I_2(P)$  pour  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  puis se ramener à un système.  
Pour l'ordre de la formule, calculer  $I_2(X^3)$  puis  $I_2(P)$  pour  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  et enfin  $I_2(X^4)$ .
2. (a) Montrer que  $\varphi$  est injective avec un argument sur les polynômes et conclure avec les dimensions.  
(b) Traduire les conditions demandées en utilisant  $\varphi$ .  
(c) Utiliser l'image d'une base par un isomorphisme.  
(d) Remarquer que la formule est exacte ssi elle est exacte pour les vecteurs d'une base.  
(e) On connaît les racines et le coefficient dominant des polynômes recherchés.
3. (a) Appliquer le résultat à  $Q = P((d-x)X + c)$ .  
(b) i. Exprimer  $\Phi$  en fonction de  $f$  et de  $F$ , une primitive de  $f$ . Attention à ne pas oublier de termes composés dans les calculs de dérivées.  
ii. Combiner le théorème des bornes atteintes et l'inégalité des accroissements finis.  
iii. Intégrer l'inégalité précédente.  
iv. Intégrer encore deux fois.  
(c) Appliquer la question précédente à  $c_i = a + i \frac{b-a}{n}$  et  $d_i = a + (i+1) \frac{b-a}{n}$  puis sommer les inégalités.