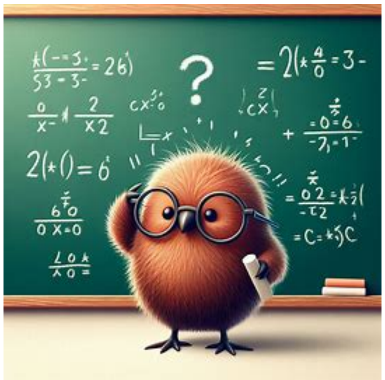
Révisions
PCSI1

Mathématiques

Lycée Saint-Louis
2025-2026

Table des matières



Séance 1

Classiques en algèbre linéaire

Exercice de calcul *(Chapitre 16, exemple 5)*

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos(x).\mathrm{ch}(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \sqrt{1+x}\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Inégalité

On pose : $f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} \end{array}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $|f(x,t)| \leq g(t)$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Exercice 1 *(Chapitre 19, exemple 2)*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x.$$

Montrer que f est une homothétie.

Exercice 2 *(Chapitre 12, exercice 8)*

Déterminer :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}.$$

Exercice 3 *(Chapitre 19, exemple 12)*

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$K_p = \ker f^p \text{ et } I_p = \mathrm{Im}\, f^p,$$

où $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

1. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1} \text{ et } I_{p+1} \subset I_p.$$
2. Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
3. Montrer que :
$$I_r = I_{r+1}$$
4. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p},\ I_r = I_{r+p}.$$
5. Montrer que :
$$E = K_r \oplus I_r$$

Exercice 4 *(Chapitre 19, exercice 13)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 5 *(Chapitre 20, exemple 11)*

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3$ et $\mathcal{B} = ((1,3,1),(1,0,-2),(0,1,-1))$.
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On note $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.
3. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Séance 2

Polynômes de Lagrange

Exercice de calcul *(Chapitre 9, exemple 8)*
Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$xy' + y = \cos(x).$$

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(1+n^2x)} \end{array}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \left|f_n(x)\right| \leq u_n$ et $\sum u_n$ converge.

Exercice 6 *(Chapitre 19, exercice 21)*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

1. On considère l'application :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_{n+1})) \end{array}.$$
Montrer que φ est un isomorphisme.
2. On note $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, on pose $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$.
Montrer que $(L_1, \ldots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner l'expression de L_k en fonction de $a_1, \ldots, a_{n+1}$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1, \ldots, L_{n+1})$.

Problème 1 *(Problème fait en classe)*

1. Dans cette partie, on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $a_1, \ldots, a_n$ des réels **deux à deux distincts**.
On définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} (a_i - a_j)}.$$
Les polynômes $L_1, \ldots, L_n$ sont appelés les **polynômes d'interpolation de Lagrange** aux points $x_1, \ldots, x_n$.
Si i et $k \in \mathbb{N}$, le symbole de Kronecker est noté $\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$
   (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de L_i.

(b) Montrer que :

$$\forall i, k \in [\![1, n]\!],\ L_i(a_k) = \delta_{i,k}$$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, monter qu'il existe un unique $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

Déterminer la valeur de $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

(d) Déduire des questions précédentes que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Q(a_k) = x_k$.

(e) On pose $\Phi = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.

i. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \Phi'(a_i) \neq 0.$$

ii. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit Q le polynôme défini à la question 1.d.
Montrer que :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$

2. Si f est une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

3. Pour une fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on notera $||f||_\infty = \max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

On se donne $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.
On note P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(a_i) = f(a_i)$$

(on a prouvé l'existence et l'unicité dans la partie précédente).

On note $\Phi = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

(a) Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda \Phi(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on **fixe** $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

i. Montrer qu'il est possible de choisir λ tel que $\varphi(t) = 0$. On fixe ainsi λ dans la suite de cette question.

ii. Montrer que φ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1, 1]$. En déduire que φ' s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$.

iii. En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$. On note a un réel de $[-1, 1]$ où $\varphi^{(n)}$ s'annule.

iv. En déduire que $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \Phi(t)$.

(b) Déduire de la question précédente que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |\Phi(t)|$, où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.

Exercice 7 *(Chapitre 25, exemple 15)*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose :

$$\forall P, Q \in E,\ (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k).$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Soit $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.
4. Soit $Q \in E$, calculer $d(Q, F)$.

Séance 3

Suites récurrentes

Exercice de calcul *(Chapitre 6, exemple 18)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer avec deux méthodes différentes :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Inégalité

Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $a < b$. On pose : $f : \begin{array}{ccc} [a,b] \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} \end{array}$. Montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}^+$, $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq h(t)$ et $h(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Exercice 8 *(Chapitre 11, exercice 27)*

Etudier les suites réelles définies par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{16} + u_n^2.$$

Exercice 9 *(Chapitre 14, exercice 21)*

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} \sin u_n.$$

Etudier la convergence de (u_n).

Problème 2 *(Devoir libre 12)*

1. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} u: & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3+2x-6 \end{array}$$

   (a) Montrer que u réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,+\infty[$ tel que :

$$u(\alpha) = 0.$$

   (c) Montrer que $\alpha \in [1,2]$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1,\alpha] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{6}{2+u_n^2}. \end{cases}$$

   (a) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = \alpha$? (On justifiera rigoureusement la réponse.)
   On suppose dans toute la suite du problème que $u_0 \in [1,\alpha[$.
   (b) On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{6}{2+x^2} \end{array}$$

   Etablir le tableau de variations de f.
   On précisera les valeurs de $f(1)$, $f(\alpha)$ et $f(2)$.
   (c) i. Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans $[1,\alpha[$.
   ii. Un calcul qui n'est pas demandé montre que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f\circ f(x) - x = -\frac{(x-1)(x-2)(x^3+2x-6)}{(2+x^2)^2+18}.$$

   Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   iii. Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.
   (d) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est : contenue dans $]\alpha,2]$, croissante et converge vers une limite que l'on précisera.
   (e) Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en termes de convergence ?

Séance 4

Dénombrement et probabilités

Exercice de calcul *(Chapitre 16, exemple 7)*

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x^3)$ à l'ordre 8 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (\cos x)^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+4\sin x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{rccc} f_n : & [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2}{1+n^2x^2} \end{array}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)| \leq u_n$ et $\sum u_n$ converge.

Exercice 10 *(Chapitre 21, exemple 7)*

On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. Combien y a-t-il de possibilités si :

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

Exercice 11 *(Chapitre 22, exemple 4)*

Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.

1. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2. Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

Exercice 12 *(Chapitre 22, exemple 8)*

n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p. En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p. Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?

Séance 5

Théorème de Césaro

Exercice de calcul *(Chapitre 12, exemple 7)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Inégalité

On pose : $\begin{array}{rccl} f: & (\mathbb{R}^+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2} \end{array}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que : $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ et $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Exercice 13 *(Chapitre 11, exemple 5)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
Ce résultat s'appelle le théorème de Césaro.

Problème 3 *(Révisions Noël)*

A toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On admet le théorème de Césaro (exemple 5 du cours) : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

1. On considère la suite définie par :

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

(d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n + 1}.$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n en fonction de n, x_{n+1} et x_1. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} n x_n = 1.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle.
   (a) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel l.
      i. Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
      ii. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le cas où $l \neq 0$.
      iii. Dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente?
3. Dans cette question, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n.$$

   (a) Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Conclure quand à la validité de la réciproque de la proposition énoncée à la question 1.(b).
4. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (a) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$n u_{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq 2v_{2n} - v_n$.
   (c) Etablir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la limite.
   (d) Qu'a-t-on démontré?

Séance 6

Polynômes de Tchebychev

Exercice de calcul *(Chapitre 8, exemple 18)*

Déterminer les primitives de :

$$x \mapsto \frac{x+1}{4x^2-4x+1}.$$

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^4} \end{array}$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $\left|f_n(x)\right| \leq c\sqrt{n}$.

Exercice 14 *(Chapitre 15, exercice 16)*

On définit une suite de polynômes par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

3. Déterminer les racines de T_n.

Problème 4 *(Nouveau problème, d'après Centrale PC 2022)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on note L_i le polynôme de degré $n-1$ défini par :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

On dit que $L_1, \dots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$.

1. **Polynômes de Lagrange**

   (a) Montrer que, pour tout i et k dans $[\![1, n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.$$

(c) Montrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.$$

2. **Polynômes de Tchebychev**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p.$$

(a) En développant $(1+x)^n$ pour deux réels x bien choisis, montrer que

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

(b) Montrer que T_n est un polynôme de degré n. Expliciter le coefficient dominant de T_n.

(c) Montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

On pourra utiliser la formule de Moivre.

(d) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Montrer que

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

3. **Une première inégalité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et W un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) de degré n. L'objectif de cette question est de montrer que

$$\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{6.1}$$

puis d'étudier dans quel cas il y a égalité.

(a) Montrer que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$. En déduire un polynôme unitaire de degré n réalisant le cas d'égalité dans (1).

On pose $Q = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

(b) Montrer que Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

(c) Dans cette question, on montre (1) par l'absurde. On suppose donc que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

i. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $Q(z_k) > 0$ si k est pair et $Q(z_k) < 0$ si k est impair.

ii. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $c_k \in]z_{k+1}, z_k[$ tel que $Q(c_k) = 0$.

iii. En déduire une contradiction et conclure.

(d) On suppose maintenant que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

i. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (z_k - z_j)} \geq 0.$$

ii. En déduire que $Q = 0$, puis que $W = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$.

On pourra considérer la somme des inégalités de la question précédente et exploiter la question 1.(c) appliquée à des données convenables.

Séance 7

Equations fonctionnelles

Exercice de calcul *(Chapitre 7, exemple 12)*

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kt).$$

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^3}{1+nx^2} \end{array}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n(x) - x\right| \le u_n$ et $\lim u_n = 0$.

Problème 5 *(Devoir libre 15)*

Le but de ce problème est de déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

Soit f une telle application.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) + x^2.$$
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$
5. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + f(1)x.$$
6. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$
7. Conclure.

Problème 6 *(Devoir libre 15)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On cherche les fonctions f définies et continues sur I vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in I,\ f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (1)$$

<u>Première méthode :</u>

Ici $I=\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1).

1. Montrer que $E \neq \emptyset$.
2. Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x)-f(0)$ est un élément de E.
3. Soit $f \in E$ tel que $f(0)=0$. On pose $a=f(1)$.
   (a) Etudier la parité de f.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2)=2f(x+1)-f(x)$.
   (c) En déduire que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f(m)=am$.
   (d) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{1}{2^p}\right)=a\frac{1}{2^p}$.
   (e) On note $D=\{\frac{n}{2^p},\ n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\}$. Montrer que : $\forall x \in D,\ f(x)=ax$.
   (f) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=\frac{\lfloor 2^n x_0\rfloor}{2^n}$.
      i. Vérifier que cette suite est à valeurs dans D.
      ii. A l'aide d'encadrements, démontrer que cette suite converge et donner sa limite.
      iii. En déduire l'expression de $f(x_0)$.
   (g) Conclure : quel est l'ensemble E ?

<u>Seconde méthode :</u>

Ici $I=[0,1]$. On veut déterminer l'ensemble E' des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ vérifiant (1).

4. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ 2x \in [0,1] \text{ ou } 2x-1 \in [0,1].$$

5. Soit $f \in E'$. On suppose que $f(0)=f(1)$.
   (a) Montrer qu'il existe $c, d \in [0,1]$ tels que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(d) \leq f(x) \leq f(c).$$

   (b) On suppose dans cette question que $c, d \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. En utilisant la question 4., montrer que $f(0)=f(c)=f(d)$. Qu'en déduire pour f ?
   (c) Que se passe-t-il dans les autres cas ?
6. Soit $f \in E'$. On considère enfin $h : x \mapsto f(x)-(f(1)-f(0))x$. Montrer que h vérifie la relation (1), puis que h est constante.
7. Conclure : quel est l'ensemble E' ?

Séance 8

Déterminants

Exercice de calcul *(Chapitre 16, exemple 8)*

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\text{sh}^2 x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Inégalité

Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que $a < b$. On pose : $\begin{array}{rccl} u : & [a,b]\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{array}$. Montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ est bornée.

Exercice 15 *(Chapitre 24, exemple 8)*

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.

Problème 7 *(Problème fait en classe)*

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$.

Partie 1 :

1. Soient $u, v \in E$. On note :

$$Gram(u,v) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) \\ (v|u) & (v|v) \end{pmatrix} \text{ et } G(u,v) = \det(Gram(u,v)).$$

   Montrer que $G(u,v) \ge 0$. A quelle condition a-t-on $G(u,v) = 0$?

2. Soient $u, v, w \in E$. On note :

$$Gram(u,v,w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } G(u,v,w) = \det(Gram(u,v,w)).$$

   (a) On suppose, dans cette question, que w est orthogonal à u et v.
   Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.

   (b) On suppose, dans cette question, que w est combinaison linéaire de u et v.
   Calculer $G(u,v,w)$.

   (c) On suppose, dans cette question, que $w = t + n$ avec t combinaison linéaire de u et v, et n orthogonal à u et v.
   Montrer que :

$$G(u,v,w) = \|n\|^2 G(u,v).$$

   (d) Etablir l'équivalence :

$$(u,v,w) \text{ libre ssi } G(u,v,w) \neq 0.$$

Partie 2 :

Soit $n \geq 2$, soient $u_1, \ldots, u_n \in E$.
On pose :

$$Gram(u_1,\ldots,u_n) = \big((u_i|u_j)\big)_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{et } G(u_1,\ldots,u_n) = \det(Gram(u_1,\ldots,u_n)).$$

1. Montrer que si la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est liée, alors $G(u_1,\ldots,u_n) = 0$.
2. On suppose, dans cette question, que la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre.
   Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$.
   Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de passage de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ à la base $(u_1,\ldots,u_n)$.

   (a) Exprimer $(u_i|u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice A.

   (b) Montrer que $Gram(u_1,\ldots,u_n) = {}^tAA$.

   (c) En déduire que :

$$G(u_1,\ldots,u_n) > 0.$$

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de F. Soit $x \in E$.

   (a) En écrivant $x = y + n$ avec $y \in F$ et $n \in F^\perp$, montrer que :

$$d(x,F) = \|n\|.$$

   (b) Montrer que :

$$d(x,F) = \sqrt{\frac{G(u_1,\ldots,u_p,x)}{G(u_1,\ldots,u_p)}}.$$

Partie 3 :

1. On pose :

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

   Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Désormais, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $(P|Q)$ au lieu de $\varphi(P,Q)$ le produit scalaire de deux éléments P et Q de $\mathbb{R}[X]$.
   On pose :

$$d = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - (at+b))^2\,dt.$$

   (a) Interpréter d à l'aide de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de E à préciser.

   (b) Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}.$$

   (c) Donner la valeur de d.

Séance 9

Limites d'intégrales

Exercice de calcul *(Chapitre 25, exemple 11)*

Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in E, < P, Q >= \int_0^1 tP(t)Q(t)\,dt.$$

Orthonormaliser la base canonique de E.

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^n}{x^{n+2}+1} \end{array}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \left|f_n(x)\right| \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 16 *(Chapitre 18, exemple 1)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0.$$

Exercice 17 *(Chapitre 18, exemple 2)*

Soient $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Exercice 18 *(Chapitre 18, exemple 3)*

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Exercice 19 *(Chapitre 18, exercice 11)*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[)$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.
Soit $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = l.$$

Séance 10

Probabilités, espérance et variance

Exercice de calcul *(Chapitre 9, exemple 14)*
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0.$$

On pourra poser $z = e^{x^2} y$.

Inégalité
Soit $a > 0$. On pose : $f : \begin{array}{ccc} [a, +\infty[\times \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-xt}\sin(t)}{t} \end{array}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*})$ telle que : $\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}^{+*}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$ et $g(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Exercice 20 *(Chapitre 23, exemple 2)*
Une personne écrit à une autre pendant un an (365 jours) selon la règle suivante :

- le jour de l'an, il écrit de façon certaine,
- s'il a écrit le jour i, il écrira le jour suivant avec une probabilité $\frac{1}{2}$,
- s'il n'a pas écrit le jour i, il écrira le jour suivant de façon certaine.

Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si une lettre a été écrite le jour i et 0 sinon.

1. Exprimer $P(X_{i+1} = 1)$ en fonction de $P(X_i = 1)$.
2. En déduire la loi de X_i pour $i \in [\![1, 365]\!]$.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lettres écrites dans l'année. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 21 *(Chapitre 23, exemple 11)*
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Exercice 22 *(Chapitre 23, exercice 9)*

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois , les espérances et les variances de X_2 et X_3.
2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.
3. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1).$$

4. Soit $n \geq 2$. On pose :

$$\begin{array}{rccl} Q_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k. \end{array}$$

   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2}Q_n(s).$$

   (c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.

   (d) Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

Séance 11

Compléments sur les séries numériques

Exercice de calcul *(Chapitre 7, exemple 25)*
Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^6 - 2iz^3 - 2 = 0.$$

Inégalité

Soient $0 < a < b$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{1+n^2x^2} \end{array}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \left|f_n(x)\right| \leq u_n$ et $\sum u_n$ converge.

Exercice 23 *(Chapitre 26, exercice 9)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

1. (a) Si $l > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.
   (b) Si $l \in [0,1[$, montrer que $\sum u_n$ converge.

   Ce résultat est appelé le critère de D'Alembert.
2. Etudier alors la nature des séries de terme général :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{2^n(\sin\alpha)^{2n}}{n^2}$ où $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{n^n}$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{\ln n}{n!}$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$

Exercice 24 *(Chapitre 26, exercice 27)*

1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergeant vers 0.

   On considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

   (b) En déduire que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

   Ce résultat est appelé le critère spécial des séries alternées.

2. Applications :

   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

   (b) Etudier la nature de la série de terme général :

   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n \left((1 + \dfrac{1}{n})^{-n} - \dfrac{1}{e} \right)$,

   (c) Etudier la nature de la série de terme général :

   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin\left(\pi \dfrac{n^3+1}{n^2+1} \right)$.

   (d) Etudier la nature de la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x \ln x}\, dx.$$

Exercice 25 *(Chapitre 26, exemple 6)*

1. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

2. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

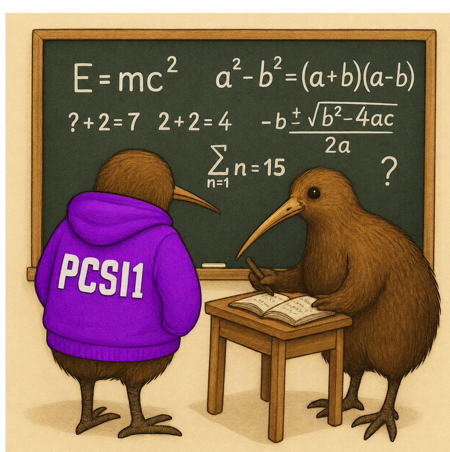
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

   Le réel γ est appelé la constante d'Euler.

Exercice 26 *(Chapitre 26, exemple 8)*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que la série : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi : $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est appelée série de Bertrand.



Séance 12

Deux thèmes : la trace et une somme de classique

Exercice de calcul *(Chapitre 8, exemple 5)*
Déterminer une primitive de $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$.

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{cccc} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & xe^{-nx^2} \end{array}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq u_n$ et $\lim u_n = 0$.

Exercice 27 *(Chapitre 12, exercice 7)*
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de M et on note $\operatorname{tr}(M)$ le nombre :

$$\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, montrer que :
$$\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que :
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$\operatorname{tr}(A^T A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0_n.$$
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)) \Longleftrightarrow A = B.$$

Exercice 28 *(Chapitre 19, exercice 32)*
Pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de M et on note $\operatorname{tr}(M)$ le nombre :

$$\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

1. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire.
2. Déterminer la dimension de :
$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(M) = 0\}.$$

Exercice 29 *(Chapitre 19, Nouvel exercice)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(Mat_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$ base de E.
   On appelle trace de f et on note $\mathrm{tr}(f)$ le nombre $\mathrm{tr}(Mat_{\mathcal{B}}(f))$ où $\mathcal{B}$ base de E.
2. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = 1$. Montrer que :
$$f^2 = \mathrm{tr}(f) f.$$

Problème 8 *(Devoir libre 33)*

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Déterminer, s'ils existent, module et argument du nombre complexe $u = 1 + e^{i\theta}$.
2. On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par
$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$$
   (a) Etude des cas $n = 1$ et $n = 2$
      i. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.
      ii. Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-il irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?
   (b) Cas général
      i. Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.
      ii. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression des racines N-ièmes de l'unité.
      iii. Calculer $P_n(i)$.
      iv. Prouver par un argument géométrique que les racines de P_n sont réelles.
      v. Soit $a \in \mathbb{C}$. prouver l'équivalence
$$a \text{ est racine de } P_n \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$
      vi. Déterminer les racines du polynôme P_n. Vérifier alors le résultat de 2.b.iv.
      vii. En développant P_n, déterminer un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que
$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$
      On admettra l'unicité du polynôme Q_n ainsi obtenu.
      viii. Expliciter Q_1 et Q_2 et déterminer leurs racines respectives.
      ix. Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.
3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$. En utilisant des résultats obtenus à la question précédente, montrer que $S_n = \frac{n(2n-1)}{3}$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$
   En déduire que
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$
5. Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ et calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Séance 13

Difficiles en algèbre linéaire

Exercice de calcul *(Chapitre 18, exemple 8)*

Calculer :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{-k/n}}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^2n}$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\prod\limits_{k=1}^{n} (k^2+n^2)^{1/n}$.

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} \end{array}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|f_n(x)-|x|\right| \leq u_n$ et $\lim u_n = 0$.

Exercice 30 *(Chapitre 19, exemple 9)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $g \in GL(E)$ et p projecteur tel que $f = g \circ p$.

Exercice 31 *(Chapitre 19, exercice 28)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\ker u = G$.

Exercice 32 *(Chapitre 20, exercice 27)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit $r \leq \min(n,p)$.
On pose :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Montrer que :

$$\mathrm{rg}(A) = r \Leftrightarrow \exists P \in GL_p(\mathbb{K}), \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}),\ A = QJ_rP.$$

Exercice 33 *(Chapitre 20, exemple 13)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_n$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Séance 14

Problèmes : Déterminants et séries

Exercice de calcul *(Chapitre 9, exemple 15)*

Résoudre l'équation différentielle :

$$-3y'' - 2y' + y = \cos(x).$$

Inégalité

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{rccl} f_n : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \end{array}$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,+\infty[, \left|f_n(x)\right| \leq f(x)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

Problème 9 *(Nouveau problème, E3A PC 2012)*

Question préliminaire :

Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que :

$$(1+\alpha)(1+\beta) \geq (1+\alpha+\beta).$$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et pour $n \geq 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n v_n$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.
2. Démontrer que :

$$\forall n \geq 3, \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}.$$

3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n \leq \prod_{k=1}^{n}(1+a_k).$$
On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel n.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
   (a) Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta_n \geq 1$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$.
   Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geq 2} t_n$.
   (c) Prouver alors que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

Problème 10 *(Problème fait en classe)*

On souhaite prouver la formule de Stirling :
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

1. On considère les suites définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \ln(u_n).$$
   (a) Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
   (b) En déduire que la suite (v_n) converge.
   (c) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :
$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$
2. On souhaite prouver maintenant que $k = \sqrt{2\pi}$.
On considère les intégrales de Wallis définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt.$$
   (a) i. Calculer I_0 et I_1.
   ii. Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
   iii. Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.
   (b) i. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}.$$
   ii. En déduire que :
$$\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$
   iii. En déduire que :
$$\frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \pi.$$
3. Montrer que :
$$\frac{1}{p}\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 \sim \frac{k^2}{2}.$$
4. Conclure.
5. Application : montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum u_n$ avec :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1.$$

Séance 15

Problème : Probabilités et matrices

Exercice de calcul *(Chapitre 14, exemple 13)*

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$f : x \mapsto e^{2x}(x+2).$$

Inégalité

On pose : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \end{array}$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*})$ telle que : $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$ et $t \mapsto t^3 g(t)$ admet une limite finie en $+\infty$.

Problème 11 *(Nouveau problème, CCINP PC 2019)*

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ; plus précisément, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

1. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n=0$ et $n=1$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.
3. En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}.$$

5. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n]$.
6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
7. En déduire une expression de a_n.

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

(a) si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
(b) sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

8. Calculer $\mathbb{P}(T_B = 1)$ et $\mathbb{P}(T_B = 2)$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.
10. Établir que $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$, puis en déduire que $\mathbb{P}(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}$.

    Dans la suite, on admet la relation :

    $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(B_{n+1} \;\middle|\; \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

    On admettra les résultats suivants : si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors :

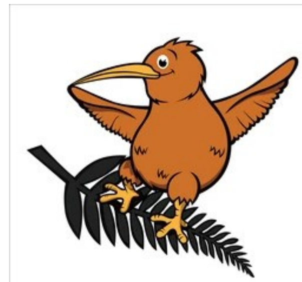
    - la série $\sum P(X=k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$,
    - on dit que X admet une espérance ssi la série $\sum kP(X=k)$ converge et on définit alors l'espérance de X par :

    $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k).$$

11. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(T_B = k)$. Que vaut $\mathbb{P}(T_B = 0)$?
12. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

Séance 16

Problème complet d'algèbre



Problème 12 *(Nouveau problème, Centrale PC 2016)*

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a,b]\!]$ l'ensemble $[a,b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0,k]\!]$, le coefficient binomial $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

I. L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

A. L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\tau : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.
3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.
4. Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ. L'application τ est-elle diagonalisable ?
5. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question 2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
6. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.
7. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} u_j \tag{16.1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

8. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{16.2}$$

9. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (16.1) ? Vérifier alors la formule (16.2).

B. L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{array}{rccc} \delta : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
2. En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}\,(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
3. Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{16.3}$$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{16.4}$$

6. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
   (a) Montrer que u et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Conclure.
7. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.
   (a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
   (b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

II. Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p, 0) = 0$.

A. Quelques cas particuliers

1. Que vaut $S(p, n)$ pour $p < n$?
2. Déterminer $S(n, n)$.
3. Déterminer $S(n+1, n)$.

B. Recherche d'une expression générale

1. Combien y a-t-il d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?
2. Pour $p \geqslant n$, établir la formule
$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p,k) \tag{16.5}$$
où $S(p,0) = 0$ par convention.
3. En déduire une expression de $S(p,n)$ pour $p \geqslant n$.
4. En relisant la question 5, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

C.

1. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$

III. Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \quad \text{pour } k \in [\![1,n]\!] \end{cases}$$

A. Généralités

1. Montrer que la famille $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.
3. La matrice M définie à la question 3 et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par
$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
sont-elles semblables ?
4. Montrer que, pour $k, l \in [\![0,n]\!]$,
$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$
5. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P = \sum_{k=0}^{n} (\delta^k(P))(0) H_k$$

B. Étude d'un exemple

1. Donner les coordonnées du polynômes $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que
$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$
3. Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que
$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

C. Polynômes à valeurs entières

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.
2. En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.
4. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont entières.
5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

IV. Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \delta(f) : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x+1) - f(x) \end{array}$$

A.

1. Montrer que $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comparer $(\delta(f))'$ et $\delta(f')$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $(\delta^n(f))(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice j appartient à $[\![0, n]\!]$).
3. Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe un $y_1 \in]0, 1[$ tel que
$$(\delta(f))(x) = f'(x + y_1)$$
4. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0, n[$ tel que
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n) \tag{16.6}$$
On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.

B.

On considère dans toute la suite de cette partie un réel α. On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

1. Montrer que pour tout entier k strictement positif, k^α appartient à $\mathbb{N}^*$.
2. Montrer que α est positif ou nul.
3. On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

C.

On applique la relation (16.6) à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

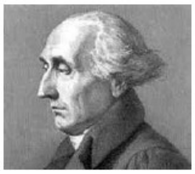
1. Montrer que l'expression
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$$
est un entier relatif.
2. Les notations sont celles de la question 4 ? Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?
3. Conclure.

Séance **17**

Jeux

Mathématiciens mélés :

L	V	A	R	S	E	E	T	D	I	M	H	C	S
B	A	H	B	U	G	R	U	M	L	M	C	R	C
E	N	G	B	R	T	E	O	C	O	J	W	A	O
R	D	K	R	R	A	S	J	G	L	I	L	M	R
N	E	N	T	A	Y	L	O	R	A	I	V	E	A
O	R	I	W	S	N	E	R	S	O	H	D	R	S
U	M	H	M	N	U	G	U	C	Y	L	T	E	E
L	O	C	C	N	G	U	E	H	T	O	L	Y	C
L	N	A	H	A	V	N	E	W	T	O	N	E	P
I	D	M	K	M	O	P	C	A	U	C	H	Y	C
T	E	U	L	E	R	U	I	R	M	P	J	O	S
U	T	L	E	I	B	N	I	Z	B	A	V	U	I
N	A	T	R	R	S	I	L	L	A	W	R	N	U
M	S	E	L	S	A	H	C	S	S	U	A	G	N

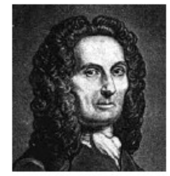


_ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _



_ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

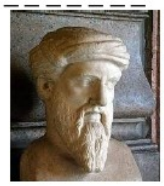
_ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _

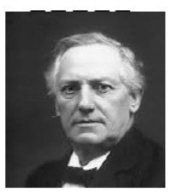


_ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _



_ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _

Logimage :

Le but consiste à retrouver les cases noires dans la grille. Les chiffres donnés sur le côté et en haut de la grille indiquent la taille des blocs de cases noires de la ligne ou de la colonne sur laquelle ils se trouvent.

			2				1																	
3	5	9	2		5		1																	
2	1	1	2	9	1	3	3	2	1	3				2		2		4	2		3	4		
2	1	3	1	1	1	2	2	6	7	7	1	8	10	7	12	12	14	7	11		8	5	7	
1	1	2	2	2	2	5	1	2	1	2	6	1	2	1	3	1	1	1	1	15	1	2	1	5

3
3
2 2
3 3
3 3
7
5 1
1 1 1 1
2 2 5 5
9
1 1 1 4 2 3
8 2 9
8 2 2
1 16
1 1 15 2
4 19
19
1 17
5 10
5 8
2 2 3
2 3 2
2 4 3
1 1 1 2 1 2 2
1 4 3


BEACH
VOLLEY
KIWI
#1
Algèbre
Géométrie
Équations Complexes
Notes de Cours - Maths


PCSI1