


Classiques en algèbre linéaire

 **Exercice de calcul** (Chapitre 16, exemple 5)

1.

$$\begin{aligned} \cos(x) \cdot \operatorname{ch}(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \ln(1+x) &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= x + o(x^2) \end{aligned}$$



Inégalité

Soit $(x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a :

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Posons $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ alors g est continue sur \mathbb{R}^+ et $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc g convient.



Exercice 1 (Chapitre 19, exemple 2)

- Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$.

- Si (x, y) est libre. On a : $\lambda_{x+y}(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$,
Donc :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0.$$

Comme la famille (x, y) est libre, on obtient : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

- Si (x, y) est liée.

Il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$ (car $x \neq 0_E$).

Alors $\lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y$. D'où $(\lambda_y - \lambda_x)y = 0$ et comme $y \neq 0_E$, $\lambda_y - \lambda_x = 0$ puis $\lambda_x = \lambda_y$.

Dans tous les cas $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc : $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, $\lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi, il existe λ tel que : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$.

- De plus $f(0_E) = 0_E = \lambda 0_E$.

Donc : $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$ et f est une homothétie.



Exercice 2 (Chapitre 12, exercice 8)

Analyse : Supposons qu'il existe M telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$.

Alors, en particulier, pour tout $r, s \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $ME_{rs} = E_{rs}M$.

Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$(ME_{rs})_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \delta_{k,r} \delta_{s,j} = m_{i,r} \delta_{s,j},$$

et :

$$(E_{rs}M)_{ij} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,r} \delta_{s,k} m_{k,j} = m_{s,j} \delta_{r,i}.$$

Donc :

$$m_{i,r} \delta_{s,j} = m_{s,j} \delta_{r,i}.$$

Ces relations sont vraies pour tout $r, s, i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

- pour $i \neq r$ et $s = j$, on a $m_{i,r} = 0$ donc M est diagonale,
- pour $i = r$ et $s = j$, on a $m_{i,i} = m_{j,j}$ donc $M = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Synthèse : Posons $M = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$AM = A \cdot \lambda I_n = \lambda A = (\lambda I_n) \cdot A = MA.$$

Conclusion :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$



Exercice 3 (Chapitre 19, exemple 12)

1. soit $p \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in K_p$. Alors, $f^p(x) = 0$ donc $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$ et $x \in K_{p+1}$.
Ainsi, $K_p \subset K_{p+1}$.
- Soit $y \in I_{p+1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$ avec $f(x) \in E$. Ainsi, $y \in I_p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que : $\forall r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $K_r \neq K_{r+1}$. Alors, on aurait :

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \dots \subsetneq K_n \subsetneq K_{n+1}.$$

Donc

$$\dim K_0 < \dim K_1 < \dots < \dim K_p < \dots < \dim K_n < \dim K_{n+1}$$

Montrons par récurrence que : $\forall l \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $\dim(K_l) \geq l$.

- Pour $l = 0$, on a $K_0 = \{x \in E, x = 0\} = \{0\}$. Ainsi, $\dim(K_0) = 0$ donc la propriété est vraie.
- Soit $l \in [0, n]$, supposons que $\dim(K_l) \geq l$.
On a : $\dim(K_{l+1}) > \dim(K_l)$ donc $\dim(K_{l+1}) > l$.
Or, $\dim(K_{l+1}), l \in \mathbb{N}$ donc $\dim(K_{l+1}) \geq l + 1$.
- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall l \in [1, n + 1], \dim(K_l) \geq l$.

En particulier, on aurait $\dim K_{n+1} \geq n + 1$. Or, $K_{n+1} \subset E$ donc $\dim K_{n+1} \leq n$. Ainsi, $n + 1 \leq n$. Ce qui est absurde.

Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq n$ et $K_r = K_{r+1}$.

On considère alors le minimum des entiers qui conviennent.

3. On sait déjà que $I_{r+1} \subset I_r$. De plus, par le théorème du rang :

$$\dim I_{r+1} = \dim E - \dim K_{r+1} = \dim E - \dim K_r = \dim I_r.$$

Ainsi, $I_{r+1} = I_r$.

4. Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_{p+r} = K_r$.

- La propriété est immédiatement vraie pour $p = 0$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $K_{p+r} = K_r$.
On sait déjà que $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$ par le 1.
Soit $x \in K_{r+p+1}$, alors $f^{r+p+1}(x) = 0$. Ainsi, $f^{r+1}(f^p(x)) = 0$. Donc $f^p(x) \in K_{r+1}$.
Or, $K_{r+1} = K_r$ donc $f^p(x) \in K_r$.
Ainsi, $f^r(f^p(x)) = 0$ donc $f^{r+p}(x) = 0$.
Finalement, $x \in K_{r+p}$. Donc $K_{r+p+1} \subset K_{r+p}$.
On a donc prouvé que $K_{r+p+1} = K_{r+p} = K_r$.
- On a donc prouvé que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_{r+p} = K_r$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Soit $y \in I_{r+p}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{r+p}(x) = f^r(f^p(x))$ avec $f^p(x) \in E$.

Ainsi, $y \in I_r$.

Donc : $\forall p \in \mathbb{N}, I_{p+r} \subset I_p$.

De plus, par le théorème du rang, on a :

$$\dim I_{p+r} = \dim E - \dim K_{p+r} = \dim E - \dim K_r = \dim I_r.$$

Ainsi, par égalité des dimensions, $I_{p+r} = I_r$.

5. On sait déjà par le théorème du rang que $\dim K_r + \dim I_r = \dim E$.

Montrons que $K_r \cap I_r = \{0\}$.

Soit $x \in K_r \cap I_r$. Comme $x \in I_r$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^r(a)$. De plus, $0 = f^r(x) = f^{2r}(a)$. Ainsi, $a \in K_{2r} = K_r$ d'après la question précédente.

Donc $x = f^r(a) = 0$.

Ainsi, la somme est directe.

Finalement, on a bien prouvé que K_r et I_r sont supplémentaires.



Exercice 4 (Chapitre 19, exercice 13)

- Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Montrons que $g(x) \in \text{Ker}(f)$.
On a : $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$.
Ainsi, $\text{Ker}(f)$ est stable par g .
- Soit $x \in \text{Im}(f)$. Montrons que $g(x) \in \text{Im}(f)$.
Comme $x \in \text{Im}(f)$, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $g(x) = g(f(y)) = f(g(y)) \in \text{Im}(f)$, donc $\text{Im}(f)$ est stable par g .



Exercice 5 (Chapitre 20, exemple 11)

On note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B} = ((1, 3, 1), (1, 0, -2), (0, 1, -1))$.

On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z)$$

1. Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a :

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Donc \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

2. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

3. On a $u(1, 3, 1) = (6, 18, 6) = 6(1, 3, 1)$, $u(1, 0, -2) = (12, 0, -24) = 12(1, 0, -2)$ et $u(0, 1, -1) = (0, 12, -12) = 12(0, 1, -1)$ donc :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. On a $P = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Après calculs, on a : $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. De plus, par formules de changement de bases : $A = PBP^{-1}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$ et comme B est diagonale :

$$A^n = \frac{6^n}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 6^{n-1} \begin{pmatrix} 2+2^{n+2} & 1-2^n & 1-2^n \\ 6(1-2^n) & 3(1+2^n) & 3(1-2^n) \\ 2-2^{n+1} & 1-2^n & 1+5 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

