


Probabilités, espérance et variance

 **Exercice de calcul** (Chapitre 9, exemple 14)

Soit y deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Posons $z : x \mapsto e^{x^2} y(x)$ alors z est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$z'(x) = e^{x^2} (2xy'(x) + y'(x)) \text{ et } z''(x) = e^{x^2} ((4x^2 + 2)y(x) + 4xy'(x) + y''(x))$$

Ainsi :

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0 \Leftrightarrow z'' + z = 0.$$

L'équation caractéristique associée à $z'' + z = 0$ est $r^2 + 1 = 0$ qui a pour racines $\pm i$ donc les solutions de $z'' + z = 0$ sont : $z : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de $y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$ sont :

$$x \mapsto \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x}{e^{x^2}}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

 **Inégalité**

Soit $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$. Donc :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}.$$

Posons $g : t \mapsto e^{-at}$ alors g convient.



Exercice 20 (Chapitre 23, exemple 2)

1. Comme $((X_i = 0), (X_i = 1))$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} = 1) &= P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0)P(X_i = 0) + P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1)P(X_i = 1) \\ &= 1 \cdot P(X_i = 0) + \frac{1}{2}P(X_i = 1) \quad \text{par hypothèses} \\ &= 1 - P(X_i = 1) + \frac{1}{2}P(X_i = 1) \\ &= 1 - \frac{1}{2}P(X_i = 1) \end{aligned}$$

2. Soit $l \in \mathbb{R}$, on a : $l = 1 - \frac{1}{2}l \Leftrightarrow l = \frac{2}{3}$ et, soit $i \in \llbracket 1, 364 \rrbracket$,

$$P(X_{i+1} = 1) - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(P(X_i = 1) - \frac{2}{3} \right).$$

Ainsi :

$$P(X_i = 1) - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \left(P(X_1 = 1) - \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \left(P(X_1 = 1) - \frac{2}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{3}.$$

Donc :

$$X_i \sim \mathcal{B} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{3} \right)$$

3. On a : $X = \sum_{i=1}^{365} X_i$ donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{365} E(X_i) = \sum_{i=1}^{365} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 365 + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{365}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 365 + \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{365} \end{aligned}$$



Exercice 21 (Chapitre 23, exemple 11)

Posons $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, on a $E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}.$$

Ainsi :

$$1 - \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq P(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon) \leq 1.$$

De plus, comme X_1, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes :

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 \leq \frac{1}{n}.$$

Donc :

$$1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \leq P(|Y_n - E(Y_n)| < \varepsilon) \leq 1.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right| < \varepsilon \right) = 1.$$



Exercice 22 (Chapitre 23, exercice 9)

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note F_i l'événement : « Obtenir face au i -ème lancer. »

- $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

On a :

$$P(X_2 = 0) = P(F_2 \cap F_1) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = P(F_2 \cap F_1) + P(\overline{F_2} \cap \overline{F_1}) = P(F_1)P(F_2) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

car les événements $F_1 \cap F_2$, $\overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ sont incompatibles et les deux tirages sont indépendants.

De plus $P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) = 1$, ainsi :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

X_2 suit donc la loi uniforme sur $\{0, 1\}$.

On a :

$$E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = 0^2 P(X_2 = 0) + 1^2 P(X_2 = 1) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

- On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

On a :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P((\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3)) \\ &= P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) + P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \\ &= P(\overline{F_1})P(F_2)P(\overline{F_3}) + P(F_1)P(\overline{F_2})P(F_3) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})P(\overline{F_3}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Enfin, $P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Par suite,

$$E(X_3) = 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$$

Et :

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 0^1 P(X_3 = 0) + 1^2 P(X_3 = 1) + 2^2 P(X_3 = 2) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $n \geq 2$, X_n représente le gain à la suite de $n - 1$ parties. Ce gain est donc entre 0 et $n - 1$. Ainsi, $X_n(\Omega) = [0, n - 1]$.

On a :

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P((F_1 \cap \dots \cap F_n) \cup (\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n})) \\ &= P(F_1 \cap \dots \cap F_n) + P(\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_n}) \quad \text{par incompatibilité} \\ &= P(F_1) \dots P(F_n) + P(\overline{F_1}) \dots P(\overline{F_n}) \quad \text{par indépendance des différents tirages} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

On a :

$$P(X_n = n - 1) = P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \dots) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3} \dots)) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

3. $(X_n = l)_{l \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{l=0}^{n-1} P(X_{n+1} = k | X_n = l) P(X_n = l)$$

On a $P(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{1}{2}$ (puisque'il faut faire au $(n+1)$ -ième jet le même résultat que le jet précédent) et $P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) = \frac{1}{2}$ (puisque'il faut faire au $(n+1)$ -ième jet le résultat opposé au jet précédent).

Si $l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus \{k, k-1\}$, $P(X_{n+1} = k | X_n = l) = 0$. (car entre le n -ième et le $(n+1)$ -ème lancer on ne peut que gagner 0 ou 1 point).

Ainsi, l'égalité devient :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) P(X_n = k-1) + P(X_{n+1} = k | X_n = k) P(X_n = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k-1) + \frac{1}{2} P(X_n = k).$$

4. (a) • On a $Q_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) = 1$ (puisque $((X_n = k))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ forme un système complet d'événements).

• On a : $\forall s \in \mathbb{R}, Q'_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} k P(X_n = k) s^{k-1}$.

Donc :

$$Q'_n(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k) = E(X_n).$$

• De plus : $\forall s \in \mathbb{R}, Q''_n(s) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) P(X_n = k) s^{k-2}$.

Ainsi :

$$Q''_n(1) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k) = E(X_n^2) - E(X_n).$$

Ainsi :

$$V(X_n) = Q''_n(1) + E(X_n) - E(X_n)^2 = Q''_n(1) + Q'_n(1) - Q'_n(1)^2.$$

(b) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a, par les questions 2 et 3,

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^n P(X_{n+1} = k) s^k \\ &= P(X_{n+1} = 0) s^0 + P(X_{n+1} = n) s^n + \sum_{k=1}^{n-1} P(X_{n+1} = k) s^k \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{s^n}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (P(X_n = k) + P(X_n = k-1)) s^k \\ &= \frac{1}{2} P(X_n = 0) + \frac{1}{2} P(X_n = n-1) s^n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} P(X_n = k) s^{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^{k+1} \\ &= \frac{(1+s)}{2} Q_n(s) \end{aligned}$$

(c) Soit $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que $(Q_n(s))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}}$ est géométrique.

Ainsi : $\forall n \geq 2, Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} Q_2(s)$, avec $Q_2(s) = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) s = \frac{1+s}{2}$ par la question 1.

Ainsi : $\forall s \in \mathbb{R}, \forall n \geq 2, Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$.

(d) Soit $s \in \mathbb{R}$. On a :

$$Q'_n(s) = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} \quad \text{et} \quad Q''_n(s) = \frac{(n-1)(n-2)}{4} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}.$$

On a alors :

$$E(X_n) = Q'_n(1) = \frac{n-1}{2}.$$

Et :

$$V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n-1}{4}(n-2+2-n+1) = \frac{n-1}{4}.$$

