Correction de la séance 12

Deux thèmes : la trace et une somme de classique

Exercice de calcul *(Chapitre 8, exemple 5)*

Une primitive de Arctan sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \int_0^x \text{Arctan}\,(t)\,dt$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u(t) = \text{Arctan}\,(t), & u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{array}.$$

On a alors :

$$F(x) = [t\text{Arctan}\,(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = x\text{Arctan}\,(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = x\text{Arctan}\,(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Ainsi, une primitive de Arctan sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto x\text{Arctan}\,(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
Donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de Arctan sont

$$x \mapsto x\text{Arctan}\,(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est impaire, on l'étudie donc sur $\mathbb{R}^+$. De plus f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) = (1-2nx^2)e^{-nx^2}$.
Donc f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n}}, +\infty\right[$.
Ainsi, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|f_n(x)\right| \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2n}}$. Alors (u_n) convient.

Exercice 27 *(Chapitre 12, exercice 7)*

1. Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{tr}\,(\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^n \left(\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda a_{i,i} + \sum_{i=1}^n \mu b_{i,i} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n b_{i,i} \\ &= \lambda \text{tr}\,(A) + \mu \text{tr}\,(B) \end{aligned}$$

2. Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Posons $AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} \\
&= \operatorname{tr}(BA)
\end{aligned}$$

3.
   - Si $A = 0_n$, alors $A^T A = 0_n$ donc $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$.
   - Supposons $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$. Alors :
   $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = 0.$$
   Or : $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{j,i}^2 \geq 0$. Ainsi : $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{j,i} = 0$. Donc $A = 0_n$.
4.
   - Si $A = B$, alors $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = BM)$ donc $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM))$.
   - Supposons $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM))$. Alors : $(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}((A-B)M) = 0$.
   En particulier, pour $M = (A-B)^T$, $\operatorname{tr}((A-B)(A-B)^T) = 0$. Donc, d'après 3, $(A-B)^T = 0_n$. Ainsi $A = B$.

Exercice 28 *(Chapitre 19, exercice 32)*

1. Soient $M = (m_{i,j}), N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soient $_{l}ambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\lambda M + \mu N) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda m_{i,i} + \mu n_{i,i}) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} n_{i,i} \\
&= \lambda \operatorname{tr}(M) + \mu \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}(N)
\end{aligned}$$

   Donc tr est une forme linéaire.
2. Posons : $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(M) = 0\}$. On a $F = \ker \operatorname{tr}$ et comme tr est une forme linéaire non nulle ($\operatorname{tr}(I_n) = n \neq 0$) alors F est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc :
$$\dim F = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - 1 = n^2 - 1.$$

Exercice 29 *(Chapitre 19, Nouvel exercice)*

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E. On a, en posant $P = Pass(\mathcal{B},\mathcal{C})$:
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = PMat_{\mathcal{C}}(f)P^{-1}.$$
Donc, en utilisant la question 2 de l'exercice 27 :
$$\operatorname{tr}(Mat_{\mathcal{B}}(f)) = \operatorname{tr}\left(PMat_{\mathcal{C}}(f)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(Mat_{\mathcal{C}}(f)P^{-1}P\right) = \operatorname{tr}\left(Mat_{\mathcal{C}}(f)\right).$$
Donc $\operatorname{tr}(Mat_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$ base de E.
2. D'après le théorème du rang : $\dim\ker f = \dim E - \operatorname{rg} f = n-1$ donc soit $(e_1,\dots,e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$.
Comme $(e_1,\dots,e_{n-1})$ est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe e_n tel que $_mathcalB = (e_1,\dots,e_n)$ soit une base de E.
Alors :
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$
, avec $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$.
On a donc $\operatorname{tr}(f) = a_n$ et :
$$Mat_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n^2 \end{pmatrix} = a_n Mat_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{tr}(f)Mat_{\mathcal{B}}(f).$$
Ainsi :
$$f^2 = \operatorname{tr}(f)f.$$

Problème 8 *(Devoir libre 33)*

1.
$$\begin{aligned} u = 1 + e^{i\theta} &= e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) \\ &= 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\theta/2}. \end{aligned}$$
Donc :
   - si $\theta \in [0,\pi[$, comme $\cos(\frac{\theta}{2}) > 0$ on a : $|u| = 2\cos(\frac{\theta}{2})$ et $\frac{\theta}{2}$ est un argument de u,
   - si $\theta = \pi$, alors $u = 0$ donc $|u| = 0$ et u n'a pas d'argument,
   - si $\theta \in [0,\pi[$, comme $\cos(\frac{\theta}{2}) < 0$ on a $u = -2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i(\theta/2+\pi)}$ donc : $|u| = -2\cos(\frac{\theta}{2})$ et $\frac{\theta}{2}+\pi$ est un argument de u.
2. (a) i.
   - $P_1 = \frac{1}{2i}\left((X+i)^3 - (X-i)^3\right) = \frac{1}{2i}\left(6iX^2 - 2i\right) = 3X^2 - 1$,
   - $P_2 = \frac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right) = \frac{1}{2i}\left(10iX^4 - 20iX^2 + 2i\right) = 5X^4 - 10X^2 + 1$.

   ii.
   - $\deg(P_1) = 2$ donc $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et le discriminant de P_1 est $\Delta = 12 \geq 0$ donc P_1 n'est pas irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
   - $\deg(P_2) = 4$ donc $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$ donc P_2 n'est pas irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

   (b) i.
   - $\deg(X+i)^{2n+1} = \deg(X-i)^{2n+1} = 2n+1$ donc $\deg P_n \leq 2n+1$.
   - Le coefficient du terme en X^{2n+1} dans P_n est : $\frac{1}{2i}(1-1) = 0$ donc $\deg P_n \leq 2n$. Ainsi $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$.
   - Le coefficient du terme en X^{2n} dans P_n est : $\frac{1}{2i}((2n+1)i - (2n+1)(-i)) = 2n+1 \neq 0$ donc $\deg P_n = 2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.

   ii. Les racines N-ièmes de l'unité sont :
$$e^{2ik\pi/N},\ k \in [\![0, N-1]\!].$$

   iii.
$$P_n(i) = \frac{1}{2i}(2i)^{2n+1} = (2i)^{2n} = 2^{2n}(-1)^n = (-4)^n.$$

iv. Soit z une racine de P_n. Alors $(z+i)^{2n+1} = (z-1)^{2n+1}$ donc $|z+i| = |z-i|$.
Ainsi z est sur le médiatrice des points d'affixes i et $-i$ donc z est sur l'axe des abscisses.
Donc les racines de P_n sont réelles.

v.

$$\begin{aligned}
P_n(a) = 0 &\iff a \neq i \text{ et } \left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1 \\
&\iff a \neq i \text{ et } \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ \frac{a+i}{a-i} = e^{2ik\pi/(2n+1)} \\
&\iff a \neq i \text{ et } \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ a+i = (a-i)e^{2ik\pi/(2n+1)} \\
&\iff a \neq i \text{ et } \exists k \in [\![0, n]\!],\ a\left(1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}\right) = -i\left(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)}\right)
\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, l'équation devient : $0 = -2i$ ce qui est impossible. Ainsi, $k = 0$ n'est pas solution et i n'est pas racine de P_n.
On a donc :

$$P_n(a) = 0 \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ x\left(1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}\right) = -i\left(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)}\right).$$

vi.

$$\begin{aligned}
P_n(a) = 0 &\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a\left(1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}\right) = -i\left(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)}\right) \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a = \frac{-i\left(1 + e^{2ik\pi/(2n+1)}\right)}{1 - e^{2ik\pi/(2n+1)}} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a = \frac{-ie^{ik\pi/(2n+1)}\left(e^{-ik\pi/(2n+1)} + e^{ik\pi/(2n+1)}\right)}{e^{ik\pi/(2n+1)}\left(e^{-ik\pi/(2n+1)} - e^{ik\pi/(2n+1)}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a = \frac{-2i\cos\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi les racines de P_n sont :

$$\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)},\ k \in [\![1, 2n]\!],$$

qui sont réelles.

vii.

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}i^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}(-i)^k\right] \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}i^k\left(1-(-1)^k\right) \\
&= \frac{1}{i}\sum_{\substack{k\in[\![0,2n+1]\!]\\ k\text{impair}}}\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}i^k \\
&= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}X^{2n-2p}i^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}X^{2(n-p)}(-1)^p
\end{aligned}$$

Posons $Q_n = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}X^{n-p}(-1)^p$. On a :

$$Q_n(X^2) = P_{2n}(X).$$

viii.
- $P_1 = 3X^2 - 1$ donc $Q_1 = 3X - 1$ et la racine de Q_1 est $\frac{1}{3}$,
- $P_1 = 5X^4 - 10X^2 + 1$ donc $Q_2 = 5X^2 - 10X + 1$ et les racines de Q_2 sont $\frac{10\pm\sqrt{80}}{10} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$.

ix. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z'^2 = z$, alors :

$$Q_n(z) = 0 \Leftrightarrow Q_n(z'^2) = 0 \Leftrightarrow P_n(z') = 0.$$

Donc les racines de Q_n sont les carrés des racines de P_n.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, les $\dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}$ sont tous positifs et deux à distincts. Donc les $\dfrac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{(2n+1)}\right)}$ sont deux même deux à deux distincts. Ainsi, Q_n admet n racines réelles distinctes et $\deg(Q_n) = n$. Donc Q_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$.
De plus, S_n est la somme des racines de Q_n.
Le coefficient en dominant de Q_n vaut $\dbinom{2n+1}{1} = 2n+1$.
Le coefficient en X^{n-1} de Q_n vaut $\dbinom{2n+1}{3}(-1) = \dfrac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} = \dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$.
D'après les relations coefficients racines, on a :

$$S_n = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4. Posons $f : x \mapsto \sin x - x$ et $g : x \mapsto \tan x - x$.
f et g sont dérivables sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$ et $g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$.
Ainsi, f et décroissante et g est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Donc : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f(x) \leq f(0)$ et $g(x) \geq g(0)$.
Donc :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) \leq 0 \text{ et } g(x) \geq 0.$$

D'où :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leq \sin(x) \leq x \text{ et } x \leq \tan(x).$$

Enfin : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $0 \leq \sin x$. Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $0 < \sin x \leq x \leq \tan x$.
Donc : $0 < \dfrac{1}{\tan x} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin x}$.
D'où : $0 < \dfrac{1}{\tan^2(x)} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$.
Or, $\cos(x) \neq 0$.
Donc $\dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \dfrac{1}{\tan^2(x)}$.
Donc :

$$0 < \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}.$$

5.
- Comme $2 > 1$, $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, d'après la question précédente, on a :

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

En sommant pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right].$$

Donc :

$$S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq n + S_n.$$

D'où :

$$S_n \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq n + S_n.$$

Donc :

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left[n + \frac{n(2n-1)}{3}\right].$$

Or, $\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \dfrac{2n^2\pi^2}{3\times 4n^2}$ donc $\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \dfrac{\pi^2}{6}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \dfrac{\pi}{6}$.
De même, $\dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left[n + \dfrac{n(2n-1)}{3}\right] = \dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \dfrac{2n^2+2n}{3} \sim \dfrac{\pi^2 2n^2}{3\times 4n^2}$.
Donc $\dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left[n + \dfrac{n(2n-1)}{3}\right] \sim \dfrac{\pi^2}{6}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left[n + \dfrac{n(2n-1)}{3}\right] = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Ainsi, par encadrement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$