


Difficiles en algèbre linéaire

 **Exercice de calcul** (Chapitre 18, exemple 8)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, par sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + e^{-k/n}} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln \frac{e + 1}{2}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : x \mapsto \frac{x^2}{1 + x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, par sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3 + k^2 n} &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx \\ &= [x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = 1 - \text{Arctan}(1) = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{k^2 + n^2}{n^2}\right)^{1/n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k^2 + n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

où $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est continue sur $[0, 1]$. Donc, par sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx.$$

Donc, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n}\right) &= [x \ln(1 + x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2} dx = \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx \\ &= \ln(2) - 2[x - \text{Arctan}(x)]_0^1 = \ln(2) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)^{1/n} = \exp(\ln(2) - 2(1 - \frac{\pi}{4})) = \frac{2}{e^{2 - \frac{\pi}{2}}}.$$

Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - |x||^2 &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|^2 = x^2 + \frac{1}{n} - 2|x| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x^2 \\ &\leq 2x^2 + \frac{1}{n} - 2|x| \sqrt{x^2} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Donc :

$$|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - |x|| \leq u_n$ et $\lim u_n = 0$ donc (u_n) convient.



Exercice 30 (Chapitre 19, exemple 9)

- On pose $G = \ker f$. Soit F un supplémentaire de G dans E , soit p la projection sur F parallèlement G .
- Soit (e_1, \dots, e_k) une base de F , soit (e_{k+1}, \dots, e_n) une base de G . Comme F et G sont supplémentaires dans E , alors (e_1, \dots, e_n) est une base de E .
- Posons : $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f_j = f(e_j)$.

Montrons que la famille (f_1, \dots, f_k) est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j = 0$.

Alors : $\sum_{j=1}^k \lambda_j f(e_j) = 0$ donc $f\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j\right) = 0$.

Ainsi $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in \ker f = G$.

Or (e_1, \dots, e_k) une base de F donc $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in F$.

Ainsi : $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j \in F \cap G = \{0\}$ donc $\sum_{j=1}^k \lambda_j e_j = 0$.

Or la famille (e_1, \dots, e_k) est libre, donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_j = 0.$$

Donc la famille (f_1, \dots, f_k) est libre.

- D'après le théorème de la base incomplète, il existe $f_{k+1}, \dots, f_n \in E$ tels que (f_1, \dots, f_n) soit une base de E .
- Soit g l'unique endomorphisme de E tel que :

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, g(e_j) = f_j.$$

Comme l'image de la base (e_1, \dots, e_n) par g est une base, alors g est un isomorphisme.

Ainsi : $g \in GL(E)$.

- Montrons que $f = g \circ p$.

- Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a :

$$g \circ p(e_j) = g(e_j) = f_j = f(e_j)$$

car $e_j \in F$ et p projection sur F .

- Soit $j \in \llbracket k+1, n \rrbracket$, on a :

$$g \circ p(e_j) = g(0) = 0 = f(e_j)$$

car $e_j \in G$ et p projection parallèlement à G et $G = \ker f$.

- Comme (e_1, \dots, e_n) est une base de E et $g \circ p, f \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$f = g \circ p.$$

- Donc g et p conviennent.



Exercice 31 (Chapitre 19, exercice 28)

- Supposons qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = F$ et $\ker u = G$. Alors, d'après le théorème du rang :

$$n = \dim \ker u + \dim \text{Im } u = \dim F + \dim G.$$

- Supposons $\dim F + \dim G = n$.

Posons $p = \dim G$, alors $\dim F = n - p$.

Soit (e_1, \dots, e_p) une base de G et (f_1, \dots, f_{n-p}) une base de F .

Comme (e_1, \dots, e_p) est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe e_{p+1}, \dots, e_n tels que (e_1, \dots, e_n) soit une base de E .

Soit u l'unique application de $\mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_k) = 0$$

$$\forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, u(e_k) = f_{k-p}.$$

Comme (e_1, \dots, e_n) est une famille génératrice de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$. Donc :

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \text{Vect}(0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{n-p}) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-p}) = F.$$

De plus :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_k \in \ker u.$$

Donc, comme $\ker u$ est un espace vectoriel :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u.$$

D'après le théorème du rang : $\dim(E) = \text{rg } u + \dim(\text{Ker } u)$. Donc $\dim(\text{Ker } u) = n - \text{rg } u$.

Or $\text{Im } u = \text{Vect}(f_1, \dots, f_{n-p})$, et comme (f_1, \dots, f_{n-p}) est libre, (f_1, \dots, f_{n-p}) est une base de $\text{Im } u$. Ainsi $\text{rg } u = \dim \text{Im } u = n - p$.

Donc $\dim(\text{Ker } u) = n - (n - p) = p$.

Or $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker u$ et $\dim(\text{Ker } u) = p = \dim \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Donc :

$$\text{Ker } u = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = G.$$

Ainsi u convient.

- Ainsi : il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = F$ et $\ker u = G$ ssi $\dim F + \dim G = n$.



Exercice 32 (Chapitre 20, exercice 27)

- Supposons qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = QJ_rP$. Alors comme P et Q sont inversibles :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(J_rP) = \text{rg}(J_r) = r.$$

En effet, si on note C_1, \dots, C_p les colonnes de J_r , on a :

$$\text{rg}(J_r) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_r) = r,$$

car (C_1, \dots, C_r) car il s'agit des r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Supposons que $\text{rg}(A) = r$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . Notons \mathcal{C}_1 (resp. \mathcal{C}_2) la base canonique de \mathbb{K}^p (resp. \mathbb{K}^n).

D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = p - r$, donc soit (e_{r+1}, \dots, e_p) une base de $\ker f$.

Comme (e_{r+1}, \dots, e_p) est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{K}^p$ tels que $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ soit une base de \mathbb{K}^p .

Comme \mathcal{B}_1 est génératrice de \mathbb{K}^p , alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est génératrice de $\text{Im } f$. Or : $\forall k > r, f(e_k) = 0$ donc $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est génératrice de $\text{Im } f$.

Or : $\text{Card}(f(e_1), \dots, f(e_r)) = r = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$, donc $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\text{Im } f$.

Comme $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est libre, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $g_{r+1}, \dots, g_n \in \mathbb{K}^n$ tels que $\mathcal{B}_2 = (f(e_1), \dots, f(e_r), g_{r+1}, \dots, g_n)$ soit une base de \mathbb{K}^n .

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_r.$$

Posons $P = \text{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1)$ et $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2)$, alors : $P \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et d'après les formules de changement de base :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(f) = \text{Pass}(\mathcal{C}_2, \mathcal{B}_2) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \text{Pass}(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1) = QJ_rP.$$



Exercice 33 (Chapitre 20, exemple 13)

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A . Posons $r = \text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

On a : $A^2 = 0_n$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(f(x)) = 0$ donc $\text{Im } f \subset \ker f$.

Soit $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ une base de $\text{Im } f$.

Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, comme $e_{2k-1} \in \text{Im } f$, il existe $e_{2k} \in \mathbb{R}^n$ tel que : $e_{2k-1} = f(e_{2k})$.

$(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ une base de $\text{Im } f \subset \ker f$ ainsi $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ est une famille libre de r vecteurs de $\ker f$. Comme $\dim \ker f = n - r$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_{2r+1}, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ ($n - 2r$ vecteurs) tels que $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\ker f$.

Posons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrons que \mathcal{B} est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$.

On a : $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k) = 0$ or $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1}, e_{2r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\ker f$ donc :

$$\lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_{2r} f(e_{2r}) = 0.$$

Donc :

$$\lambda_2 e_1 + \dots + \lambda_{2r} e_{2r-1} = 0.$$

Or $(e_1, e_3, \dots, e_{2r-1})$ est libre donc :

$$\lambda_2 = \dots = \lambda_{2r} = 0.$$

Ainsi :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{2r-1} e_{2r-1} + \lambda_{2r} e_{2r} + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

