

## Problèmes : Déterminants et séries



### Exercice de calcul (Chapitre 9, exemple 15)

On pose :  $-3y'' - 2y' + y = \cos(x)$  ( $E$ ).

- On résout  $-3y'' - 2y' + y = 0$  ( $E_0$ ).

L'équation caractéristique associée à ( $E_0$ ) est  $-3r^2 - 2r + 1 = 0$ , ses racines sont  $-1$  et  $\frac{1}{3}$ . Donc les solutions de ( $E_0$ ) sont :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x/3}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Comme  $i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de ( $E$ ) de la forme  $y : x \mapsto A \cos x + B \sin x$ . Alors :

$$-3y'' - 2y' + y = \cos(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (-4A - 2B) \cos x + (2A - 4B) \sin x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} -4A - 2B = 1 \\ 2A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{10} \\ A = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

car  $(\cos, \sin)$  libre

- Donc les solutions de ( $E$ ) sont :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x/3} - \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

### Inégalité

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$|f_n(x)| \leq \frac{n \left| \frac{x}{n} \right|}{x(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Posons  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ , alors  $f$  convient.



### Problème 9 (Nouveau problème, E3A PC 2012)

#### Question préliminaire

$(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta \geq 1 + \alpha + \beta$  puisque  $\alpha\beta \geq 0$ .

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_1 v_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1 \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + u_2 v_2 - u_1(-v_1) = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \text{ par développement par rapport à la première colonne}$$

2. Développons  $\Delta_n$  par rapport à sa dernière ligne :

$$\Delta_n = (-1)^{n+1+n} u_n \begin{vmatrix} & & 0 \\ & \Delta_{n-2} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots & -v_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}$$

Puis par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\Delta_n = u_n v_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1}$$

3. Il est clair que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 0$ .

La relation est vraie pour  $n = 1$  et  $n = 2$  puisque  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont des sommes de termes positifs.

Soit  $n \geq 2$ . Supposons la relation vraie au rang  $n$  et  $n - 1$ .

Alors, puisque  $a_{n+1} \geq 0$ ,  $\Delta_{n+1} = \Delta_n + a_{n+1} \Delta_{n-1} \geq 0$ , montrant ainsi la relation vérifiée au rang  $n + 1$ .

Conclusion :  $\forall n \geq 1, \Delta_n \geq 0$  et alors,  $\forall n \geq 3, \Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} \geq 0$ .

On a également  $\Delta_2 - \Delta_1 = u_2 v_2 \geq 0$  et on en conclut que  $(\Delta_n)_n$  est croissante.

4. On a l'égalité pour  $n = 1$  et  $\Delta_2 = 1 + u_2 v_2 + u_1 v_1 \leq (1 + a_1)(1 + a_2)$  par la question préliminaire.

Supposons la relation vérifiée aux rangs  $n$  et  $n - 1$ .

Alors

$$\Delta_{n+1} \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k) + a_{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k)(1 + a_n + a_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k)(1 + a_n)(1 + a_{n+1}) = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k)$$

On a utilisé la question préliminaire.

Ceci termine la récurrence.

5. 5.1 Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est clairement strictement positif. On peut donc considérer la suite  $(\ln P_n)_n$ .

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}, \ln P_n = S_n$ .

La suite  $(S_n)_n$  est la suite des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$ .

Or cette série est une série convergente car :

- \* elle est à termes positifs.
- \*  $\ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_n$ .
- \*  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge
- \* On conclut par critère d'équivalence.

Ainsi,  $(S_n)_n$  converge donc  $(\ln P_n)_n$  converge. Par continuité de exp et caractérisation séquentielle de la continuité,  $(P_n)_n$  converge. On peut même préciser vers une limite strictement positive.

5.2 Etant convergente, la suite  $(P_n)_n$  est majorée. L'inégalité du 4 nous montre ainsi que  $(\Delta_n)_n$  est majorée. Etant croissante et majorée, elle converge alors.

6. (a) à vérifier par récurrence sur  $n$ .

(b) Considérons la suite des sommes partielles  $(T_n)_n$  de la série  $\sum_{n \geq 2} t_n$  :

$$\forall n \geq 2, T_n = \sum_{k=2}^n t_k = \Delta_n - \Delta_1, \text{ par télescopie .}$$

Par hypothèse,  $(\Delta_n)_n$  converge donc il en est de même pour  $(T_n)_n$ , ce qui signifie que la série  $\sum_{n \geq 2} t_n$  converge.

6.3  $\forall n \geq 3, t_n = a_n \Delta_{n-2} \geq a_n \geq 0$  par 6.1.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, et puisque la série  $\sum_{n \geq 2} t_n$  converge, on obtient la convergence

de la série  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge

7. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite  $(\Delta_n)_n$  et la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} a_n$



### Problème 10 (Problème fait en classe)

1. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
 &= \ln \left( \frac{(n+1)!}{n!} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \left( \frac{e}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{n}{e} \right)^n \right) \\
 &= \ln \left( (n+1) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} e \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \ln \left( e \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1/2} \right) \\
 &= 1 + \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{n}{n+1} \right) \\
 &= 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \\
 &= 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
 &= 1 - \left( 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
 &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &\sim -\frac{1}{12n^2}
 \end{aligned}$$

- (b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-\frac{1}{12n^2}$  donc  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  et  $\sum -\frac{1}{12n^2}$  sont de même nature.  
 Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente, ainsi  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  converge.  
 Or  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  est une série télescopique donc  $(v_n)$  converge.  
 (c) Posons  $l = \lim v_n$ , alors  $\lim u_n = e^l \neq 0$ . Donc :

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left( \frac{e}{n} \right)^n \sim e^l.$$

Posons  $k = e^l > 0$ , alors :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n.$$

2. (a) i. •  $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$   
 •  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$   
 ii. Soit  $n \geq 2$ . On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin^{n-1}(t) & u'(t) &= (n-1) \cos(t) \sin^{n-2}(t) \\
 v'(t) &= \sin(t) & v(t) &= -\cos(t)
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 I_n &= [-\cos(t) \sin^{n-1}(t)]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt \\
 &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \sin^{n-2}(t) dt \\
 &= (n-1)(I_{n-2} - I_n).
 \end{aligned}$$

Donc  $nI_n = (n-1)I_{n-2}$  et ainsi :

$$\forall n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

- iii. Soit  $p \in \mathbb{N}$ .

- Soit  $k \in [1, p]$ , on a :

$$\frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \frac{2k-1}{2k},$$

donc :

$$\prod_{k=1}^p \frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}.$$

Ainsi, par produit télescopique :

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^p (2k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}.$$

Ainsi :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

iv. De même :

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^p \frac{(2k^2)}{(2k)(2k+1)} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k^2)}{\prod_{k=1}^p (2k)(2k+1)} = \frac{(2^p \prod_{k=1}^p k)^2}{(2p+1)!} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Ainsi :

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

- (b) i. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :  $0 \leq \sin t \leq 1$ . Donc :  $\sin^{2p+1}(t) \leq \sin^{2p}(t) \leq \sin^{2p-1}(t)$ .  
Donc, par croissance de l'intégrale :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}.$$

ii. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}.$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1.$$

iii. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{(2^p p!)^2} = \left( \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2}.$$

Or  $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \sim 1$  donc  $\left( \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 (2p+1) \frac{\pi}{2} \sim 1$ . D'où, comme  $2p+1 \sim 2p$ , on a :

$$\frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \pi.$$

3. D'après 1.e :

$$\frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} k^2 p \left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}{k \sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}} \right)^2 = \frac{1}{p} \left( k \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2.$$

Donc :

$$\frac{1}{p} \left( \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \sim \frac{k^2}{2}.$$

4. Ainsi  $\frac{k^2}{2} = \pi$  donc  $k = \sqrt{2\pi}$ , d'où :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n.$$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left( k \ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k (\ln(2k+1) - \ln(2k)) - n \\
 &= \sum_{k=1}^n ((k+1) \ln(2k+1) - k \ln(2k)) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= (n+1) \ln(2n+1) - \sum_{k=1}^n \ln(2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \prod_{k=1}^n (2k+1) - n \\
 &= \ln(2n+1)^{n+1} - \ln \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!} - \ln(e^n) \\
 &= \ln \left( \frac{(2n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)! e^n} \right) \\
 &= \ln \left( \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} \right)
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} &\sim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{2n}} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2n+1)^n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^n e^n} \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}
 \end{aligned}$$

Or  $n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2}$  donc :

$$\lim \frac{(2n+1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n)! e^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2}.$$

D'où :

$$\lim \sum_{k=1}^n u_k = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

Ainsi  $\sum u_n$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2).$$