Correction de la séance 15

Problème : Probabilités et matrices

Exercice de calcul *(Chapitre 14, exemple 13)*

f est le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Posons : $g : x \mapsto x+2$ et $h : x \mapsto e^{2x}$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1 \text{ et } \forall k \geq 2,\ g^{(k)}(x) = 0$$

Par récurrence, on montre que : $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$.
Soit $n \geq 1$, on utilise alors la formule de Leibniz.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\ &= \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= (x+2)2^n e^{2x} + nx2^{n-1}e^{2x} = 2^{n-1}((2+n)x+4)e^{2x} \end{aligned}$$

On remarque que la relation reste valable pour $n = 0$.

Inégalité

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$, on a :

$$|f(x,t)| \leq \frac{\pi}{2t(1+t^2)} \leq \frac{\pi}{2t^3}.$$

Posons $g : t \mapsto \dfrac{\pi}{2t^3}$ alors g convient.

Problème 11 *(Nouveau problème, CCINP PC 2019)*

1. A l'instant 0, le pion est en A donc $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
   A l'instant 1, la probabilité qu'il reste en A est $\dfrac{1}{2}$ donc $p_1 = \dfrac{1}{2}$. Sinon, il se déplace de manière équiprobable sur l'un des deux autres points donc $q_1 = r_1 = \dfrac{1}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Pour $n = 0$, on a bien $V_1 = MV_0$.
   On suppose maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

$P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de rester en A de l'instant n à l'instant $n+1$ donc $\frac{1}{2}$.
$P_{B_n}(A_{n+1})$ est la probabilité de passer de B à A donc $\frac{1}{4}$. De même, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
Par conséquent, $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n)$.
On raisonne de même pour exprimer b_{n+1} et c_{n+1} et on conclut que $V_{n+1} = MV_n$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$V_n = M^n V_0$".
$M^0 = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente, $V_{n+1} = MV_n$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $V_n = M^n V_0$ donc $V_{n+1} = MM^n V_0 = M^{n+1} V_0$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, on peut alors conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$.
$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, en utilisant le résultat admis sur M^n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n},\ q_n = r_n = \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}$$

4. Quand n tend vers l'infini, $4^n + 2 \sim 4^n$ et $4^n - 1 \sim 4^n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \frac{1}{3}$.
Cela signifie que, si on observe la position du pion après un grand nombre d'étapes, il y a autant de chances qu'il soit en A, en B ou en C.
5. $X_1 + \cdots + X_n$ est le nombre de passages par le point A lors des n premières étapes et $E(X_1 + \cdots + X_n)$ est le nombre moyen de passages par A lors des n premières étapes.

6. X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A_n) = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$ donc $E(X_n) = \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n}$.

7. $a_n = E(X_1 + \cdots + X_n)$ donc, par linéarité de l'espérance, $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$ et, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^i \right) \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

8. Comme le pion est en A à l'instant 0, $(T_B = 1) = B_1$ d'où $P(T_B = 1) = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} (T_B = 2) &= \overline{B_1} \cap B_2 \\ &= (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

Ces deux événements sont incompatibles donc $P(T_B = 1) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)$.
Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) P_{A_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.
De même $P(C_1 \cap B_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.
Finalement, $P(T_B = 2) = \frac{3}{16}$.

9. A l'instant n, le pion est en A, en B ou en C donc $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$.

10. $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2)$.
En prenant l'intersection avec B_3 on obtient 4 événements deux à deux incompatibles donc
$P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} = P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap A_1 \cap C_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap A_2) + P(B_3 \cap C_1 \cap C_2)$.
$P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2) P_{A_1 \cap A_2}(B_3) = P(A_1 \cap A_2) P_{A_2}(B_3)$ car la position à l'instant 3 ne dépend que la position à l'instant 2. Ainsi $P(B_3 \cap A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{4} P(A_1 \cap A_2)$.
On procède de même avec les 3 autres termes puis on se retrouve avec la somme de 4 probabilités d'événements incompatibles. On utilise la relation du début de cette question pour conclure :

$$P(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{4} P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$$

Avec la définition d'une probabilité conditionnelle, $P(B_3 | \overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \dfrac{1}{4}$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$(T_B = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} \right) \cap B_k$. Avec la définition d'une probabilité conditionnelle et le résultat admis, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} \right)$.
$\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} = (T_B \geq k) = (T_B = k) \cup (T_B \geq k+1)$ donc $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4}(P(T_B = k) + P(T_B \geq k+1) = \dfrac{1}{4}(P(T_B = k) + 4P(T_B = k+1))$ d'où $P(T_B = k+1) = \dfrac{3}{4} P(T_B = k)$. De plus $P(T_B = 1) = \dfrac{1}{4}$ donc, pour $k \geq 1$, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4} \left(\dfrac{3}{4} \right)^{k-1}$.
$\{T_B = k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements donc $P(T_B = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) = 1 - \dfrac{1}{4} \dfrac{1}{1 - \dfrac{3}{4}}$.
Par conséquent, $P(T_B = 0) = 0$.

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_B = k) = \dfrac{1}{4} \left(1 - \dfrac{1}{4} \right)^{k-1}$ donc T_B suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{4}$. On en déduit que T_B admet une espérance et $E(T_B) = 4$.