

Polynômes de Lagrange



Exercice de calcul (Chapitre 9, exemple 8)

On résout : $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x}$ (E) sur \mathbb{R}^{+*} .

- On résout : $y' + \frac{1}{x}y = 0$ (E_0) sur \mathbb{R}^{+*} .

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^{+*} est $x \mapsto \ln x$ donc les solutions de (E_0) sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution de (E) de la forme : $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$ avec λ dérivable. On a :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos(x)}{x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{\cos(x)}{x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \lambda'(x) = \cos(x).$$

Donc $\lambda : x \mapsto \sin x$ convient et $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est solution particulière de (E).

- Les solutions de (E) sont donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda = \frac{\lambda + \sin x}{x}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{n \cdot n^2 x} \leq \frac{1}{n^3}$$

et comme $f_n(0) = 0$, cette inégalité reste vraie pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^3}$. Alors (u_n) convient.



Exercice 6 (Chapitre 19, exercice 21)

- Montrons que φ est linéaire :
Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(a_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(a_{n+1})) \\ &= \lambda(P(a_1), \dots, P(a_{n+1})) + \mu(Q(a_1), \dots, Q(a_{n+1})) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

- Montrons que $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
Soit $P \in \text{Ker } \varphi$ alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus, $\varphi(P) = 0$. Donc : $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $P(a_i) = 0$. Or, les $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont deux à deux distincts. Ainsi, P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $\deg(P) \leq n$. Donc, $P = 0$.
Ainsi, $\text{Ker } \varphi \subset \{0\}$.
Donc, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
Ainsi, φ est injective.
- De plus, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$ donc φ est bijective.

Ainsi, φ est un isomorphisme.

- φ est un isomorphisme donc φ^{-1} est un isomorphisme.
Or, l'image d'une base par un isomorphisme est encore une base. Ainsi, (L_1, \dots, L_{n+1}) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
• Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a $\varphi^{-1}(e_k) = L_k$ donc $\varphi(L_k) = e_k$.
Ainsi, on a :

$$L_k(a_k) = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}, L_k(a_i) = 0.$$

On sait que $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$ donc L_k est un polynôme de degré au plus n .

De plus, $L_k(a_k) \neq 0$ donc L_k n'est pas le polynôme nul.

Par ailleurs, les a_i avec $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ sont racines de L_k et sont deux à deux distincts donc L_k admet au moins n racines distinctes. Comme $\deg L_k \leq n$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $L_k = \lambda \prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (X - a_i)$.

Enfin, comme $1 = L_k(a_k) = \lambda \prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_i)$.

On obtient : $\lambda = \frac{1}{\prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_i)}$ (le dénominateur est bien non nul car les a_i sont deux à deux distincts).

Finalement :

$$L_k = \frac{\prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (X - a_i)}{\prod_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}} (a_k - a_i)}$$

- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

Comme (L_1, \dots, L_{n+1}) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k$.

Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

En évaluant en a_i , on obtient : $P(a_i) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k(a_i) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \delta_{k,i} = \lambda_i$.

Ainsi : $P = \sum_{k=1}^{n+1} P(a_k) L_k$.



Problème 1 (Problème fait en classe)

- (a) Comme $\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j) \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\deg L_i = \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} 1 = n - 1.$$

- (b) Soient $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- si $i \neq k$, alors :

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{(a_k - a_k) \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, k\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = 0.$$

- si $i = k$, alors :

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} = \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_k - a_j)} = 1.$$

Donc :

$$L_i(a_k) = \delta_{i,k}.$$

- (c) • Analyse : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$P(a_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k.$$

Donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = P(a_k).$$

- Synthèse : posons $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = P(a_k)$.

Soit $Q = P - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$.

- Comme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$Q(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(a_k) = P(a_k) - \lambda_k = 0.$$

- Ainsi Q admet au moins n racines distinctes et $\deg(Q) \leq n-1$. Donc $Q = 0$. D'où :

$$P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i.$$

- Ainsi : il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$ et :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

- (d) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question précédente, $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$. Donc :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = x_k) \iff P = \sum_{i=1}^n x_i L_i,$$

d'après l'unicité des coefficients de la décomposition.

Ainsi : il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_k) = x_k$ et on a : $P = \sum_{i=1}^n x_i L_i$.

- (e) i. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i$ est racine simple de Φ donc : $\Phi'(a_i) \neq 0$.

ii. D'après 1.d, $Q = \sum_{i=1}^n x_i L_i$.

De plus, soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$Q = (X - a_i) \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_k).$$

Donc :

$$Q' = \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_k) + (X - a_i) \left(\prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_k) \right)'$$

Ainsi : $Q'(a_i) = \prod_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_k)$. Donc :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$

2. $|f|$ est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, donc, d'après le théorème des bornes atteintes, $|f|$ admet un maximum sur $[-1, 1]$.

3. (a) i. $\varphi(t) = 0 \iff f(t) - P(t) - \lambda \Phi(t) = 0 \iff \lambda \varphi(t) = f(t) - P(t)$
Or $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, donc $\Phi(t) \neq 0$, ainsi :

$$\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)} \text{ convient.}$$

- ii. • – Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \lambda \Phi(a_i) = 0$.
 – $\varphi(t) = 0$
 Donc φ s'annule en $a_1, \dots, a_n, t \in [0, 1]$ ainsi φ s'annule $n + 1$ fois au moins sur $[-1, 1]$.
- Soient $-1 \leq b_1 < \dots < b_{n+1} \leq 1$ tels que φ s'annule en b_j pour tout $j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$.
 Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, φ est continue sur $]b_j, b_{j+1}[$, dérivable sur $]b_j, b_{j+1}[$ et $\varphi(b_j) = \varphi(b_{j+1})$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_j \in]b_j, b_{j+1}[$ tel que $\varphi'(c_j) = 0$. Comme $-1 \leq c_1 < \dots < c_n \leq 1$, φ' s'annule au moins n fois sur $[-1, 1]$.
- iii. Par récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois sur $[-1, 1]$ donc $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$.
- iv. • On a : $\forall x \in [-1, 1], \varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)}(x) - \lambda \Phi^{(n)}(x)$.
 Donc : $\varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \Phi^{(n)}(a)$.
 Or $\varphi^{(n)}(a) = 0$ donc :

$$f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \Phi^{(n)}(a) = 0.$$

- On a $\deg P \leq n - 1$ donc $P^{(n)} = 0$ ainsi :

$$f^{(n)}(a) = \lambda \Phi^{(n)}(a).$$

- $\Phi = X^n + R$ avec $\deg R \leq n - 1$ donc $\Phi^{(n)} = (X^n)^{(n)} + R^{(n)}$.
 Or $\deg R \leq n - 1$ donc $R^{(n)} = 0$ et :

$$(X^n)^{(n)} = \frac{n!}{(n-n)!} X^{n-n} = n!$$

Donc :

$$\Phi^{(n)} = n!$$

- D'où : $f^{(n)}(a) = \lambda n!$ donc $\lambda = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Or : $\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\Phi(t)}$, ainsi :

$$f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Phi(t).$$

(b) Soit $t \in [-1, 1]$.

- Si $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :

$$|f(t) - P(t)| = 0 \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$

- Si $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ alors :

$$|f(t) - P(t)| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |\Phi(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$

- Dans tous les cas :

$$|f(t) - P(t)| \leq \frac{M_n}{n!} |\Phi(t)|.$$



Exercice 7 (Chapitre 25, exemple 15)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient a_0, \dots, a_n des réels distincts. On pose :

$$\forall P, Q \in E, (P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k).$$

1. Il est clair que (\cdot, \cdot) est bilinéaire, symétrique et positif.

Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$.

On a $\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0$.

Or $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k)^2 \geq 0$ donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k) = 0$.

Ainsi P admet au moins $n + 1$ racines distinctes et comme $\deg P \leq n$, on a $P = 0$.

Donc (\cdot, \cdot) est défini et est bien un produit scalaire.

2. Posons, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$L_i = \frac{\prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\prod_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}.$$

On remarque (voir problème précédent) que : $\forall i, k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_k) = \delta_{i,k}$.

Soient $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$(L_i | L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) L_j(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

Ainsi (L_0, \dots, L_n) est une famille orthonormée de E .

Comme $\text{Card}(L_0, \dots, L_n) = n + 1 = \dim E$, alors (L_0, \dots, L_n) est une base orthonormée de E .

3. On a : $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^n P(a_k) \cdot 1 = 0\} = \{P \in E, \sum_{k=0}^n (P|1) = 0\}$.

Ainsi $F = \text{Vect}(1)^\perp$. Donc :

$$F^\perp = \text{Vect}(1)^{\perp\perp} = \text{Vect}(1).$$

4. On a $\|1\| = \sqrt{\sum_{k=0}^n 1^2} = \sqrt{n+1}$. Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est une base orthonormée de F^\perp .

Donc $p_{F^\perp}(Q) = (Q | \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Q(a_k)$.

Donc :

$$d(Q, F) = \|p_{F^\perp}(Q)\| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n Q(a_k) \right| \|1\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n Q(a_k) \right|.$$