

Dénombrement et probabilités



Exercice de calcul (Chapitre 16, exemple 7)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1.

$$\operatorname{Arctan}(x^3) \underset{0}{=} x^3 + o(x^6)$$

2.

$$\begin{aligned} (\cos x)^x &\underset{0}{=} e^{x \ln(\cos x)} \\ &\underset{0}{=} e^{x \ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))} \\ &\underset{0}{=} e^{x(-\frac{x^2}{2} + o(x^3))} \\ &\underset{0}{=} e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^4)} \\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4 \sin x}} &\underset{0}{=} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4(x + o(x^2))}} \\ &\underset{0}{=} \sqrt{1 + 1 + 2x - \frac{(4x)^2}{8} + o(x^2)} \\ &\underset{0}{=} \sqrt{2 + 2x - 2x^2 + o(x^2)} \\ &\underset{0}{=} \sqrt{2} \sqrt{1 + x - x^2 + o(x^2)} \\ &\underset{0}{=} \sqrt{2} \left(1 + \frac{x - x^2}{2} - \frac{(x - x^2)^2}{8} + o(x^2) \right) \\ &\underset{0}{=} \sqrt{2} \left(1 + \frac{x - x^2}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \\ &\underset{0}{=} \sqrt{2} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + o(x^2) \right) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \cos(\sin x) &= \cos\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4 - \frac{1}{720}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^6 + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + 4x^3\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right) - \frac{1}{720}(x^6) + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^6}{36}\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 - \frac{2x^6}{3}\right) - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{120} - \frac{1}{72} - \frac{1}{36} - \frac{1}{720}\right)x^6 + o(x^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + o(x^6)
 \end{aligned}$$

Inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et : $\forall x \in [1, +\infty[, f'_n(x) = \frac{2x(1+n^2x^2) - x^2 \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2x}{(1+n^2x^2)^2} > 0$.

Donc f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, soit $x \in [1, +\infty[$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{n^2}.$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2}$, alors (u_n) convient.



Exercice 10 (Chapitre 21, exemple 7)

1. Mettre au plus un prospectus par boîte quand les prospectus sont identiques, revient à choisir les 7 boîtes aux lettres dans lesquelles on met un prospectus, c'est-à-dire choisir un ensemble à 7 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a donc : $\binom{10}{7}$ possibilités.
2. Mettre au plus un prospectus par boîte quand les prospectus sont tous différents, revient à choisir pour chacun des 7 prospectus une boîte aux lettres distincte des autres, c'est-à-dire choisir un 7-uplet d'éléments deux à deux distincts d'un ensemble à 10 éléments, il y a donc : $10!/3!$ possibilités.
3. Mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte quand les prospectus sont tous différents, revient à choisir pour chacun des 7 prospectus une boîte aux lettres, c'est-à-dire choisir un 7-uplet d'un ensemble à 10 éléments, il y a donc : 10^7 possibilités.
4. Mettre un nombre quelconque de prospectus par boîte quand les prospectus sont identiques, revient à choisir un mot constitué de 9 lettres I (cloisons entre les boîtes aux lettres) et 7 lettres O (prospectus), c'est-à-dire choisir la position des 9 lettres I parmi les 16 positions possibles, il y a donc : $\binom{16}{7}$ possibilités.



Exercice 11 (Chapitre 22, exemple 4)

Pour $k \in [0, 2]$, on note A_k : « on transfère k boules blanches de l'urne B dans l'urne A »

1. On a :

$$P(A_0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{14}{33}, P(A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{16}{33}, P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{11}.$$

De plus, on note B l'événement « on pioche une boule blanche de l'urne A » on a :

$$P(B|A_0) = \frac{6}{13}, P(B|A_1) = \frac{7}{13}, P(B|A_2) = \frac{8}{13}.$$

Or, (A_0, A_1, A_2) forme un système complet d'événements.

Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(B|A_0)P(A_0) + P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = \frac{220}{429}.$$

2. On cherche $P(A_1 \cup A_2|B)$.

On pose C : « l'une au moins des boules transférées est blanche ».

On a : $C = A_1 \cup A_2$. Ainsi :

$$P(C|B) = P(A_1 \cup A_2|B) = P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

car A_1 et A_2 sont incompatibles et P_B est une probabilité.

$$\begin{aligned} P(C|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} + \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{16}{33} \times \frac{7}{13}}{\frac{220}{429}} + \frac{\frac{1}{11} \times \frac{8}{13}}{\frac{220}{429}} \\ &= \frac{28}{55} + \frac{6}{55} \\ &= \frac{34}{55} \end{aligned}$$



Exercice 12 (Chapitre 22, exemple 8)

Méthode 1 :

Notons Z la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue des 2 épreuves.

Notons U la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à l'issue de la première épreuve.

La variable aléatoire U représente le nombre de succès (réussir à la première épreuve) lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, chacune ayant la probabilité p de réussir. Ainsi, U suit une loi binomiale de paramètres n, p .

Notons V la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant réussi à la 2ème épreuve (et donc raté la première). Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Supposons $(U = k)$ réalisé. On a alors $n - k$ candidats qui passent la deuxième épreuve et chaque candidat à la probabilité p de réussir.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 0, n - k \rrbracket$, on a :

$$P(V = i|U = k) = \binom{n-k}{i} p^i (1-p)^{n-k-i}.$$

On a $Z = U + V$ et $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

De plus, $(U = k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule de probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(Z = j) &= \sum_{k=0}^n P((U + V = j) \cap (U = k)) \\
 &= \sum_{k=0}^n P((V = j - k) \cap (U = k)) \\
 &= \sum_{k=0}^j P((V = j - k) \cap (U = k)) \text{ car } (V = j - k) = \emptyset \text{ si } j - k < 0 \\
 &= \sum_{k=0}^j P(V = j - k | U = k) P(U = k) \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{n-k}{j-k} p^{j-k} (1-p)^{n-k-(j-k)} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{n-k}{j-k} \binom{n}{k} p^j (1-p)^{2n-j-k}
 \end{aligned}$$

Or,

$$\binom{n-k}{j-k} \binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(n-j)!(j-k)!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{j!}{k!(j-k)!} \times \frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{j}{k} \binom{n}{j}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P(Z = j) &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (1-p)^{j-k} \\
 &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} (1 + 1 - p)^j \\
 &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{2n-2j} (2-p)^j \\
 &= \binom{n}{j} ((1-p)^2)^{n-j} (p(2-p))^j \\
 &= \binom{n}{j} (1-p(2-p))^{n-j} (p(2-p))^j
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p)).$$

Méthode 2 :

Notons R_1 réussir à l'issue de la 1ère tentative et R_2 réussir à l'issue de la 2ème tentative (et donc rater la 1ère). $(R_1, \overline{R_1})$ est un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
 P(R_1 \cup R_2) &= P(R_1 \cup R_2 | R_1) P(R_1) + P(R_1 \cup R_2 | \overline{R_1}) P(\overline{R_1}) \\
 &= 1 \times P(R_1) + P(R_2) P(\overline{R_1}) \\
 &= p + p(1-p) \\
 &= p(2-p)
 \end{aligned}$$

Ainsi, Z représente le nombre de succès (réussir à l'issue d'une des deux tentatives) lors la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes chacune ayant la probabilités $P(R_1 \cup R_2) = p(2-p)$ de réussir.

Ainsi, Z suit une loi binomiale de paramètre $n, p(2-p)$.