

## Polynômes de Tchebychev



### Exercice de calcul (Chapitre 8, exemple 18)

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ .  
 Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ,

$$\frac{x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{8} \frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{4x^2-4x+1} = \frac{1}{8} \frac{8x-4}{4x^2-4x+1} + \frac{3}{4} \frac{2}{(2x-1)^2}$$

Ainsi une primitive de  $x \mapsto \frac{x+1}{4x^2-4x+1}$  est  $x \mapsto \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1}$  et les primitives de  $x \mapsto \frac{x+1}{4x^2-4x+1}$  sont :

$$\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1} + \lambda_1 & \text{si } x \in ]-\infty, \frac{1}{2}[ \\ \frac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 1) - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-1} + \lambda_2 & \text{si } x \in -\frac{1}{2}, +\infty[ \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

### Inégalité

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $f_n$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et :  $\forall x \in [0, 1], f'_n(x) = \frac{n(1+n^2x^4) - nx \cdot 4n^2x^3}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n-3n^3x^4}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n(1-3n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2}$ .

Donc  $f_n$  est croissante sur  $[0, \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}]$  et décroissante sur  $[\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}, +\infty[$ .

Ainsi, soit  $x \in [0, 1]$ ,

$$|f_n(x)| \leq f_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right).$$

Or :  $f_n\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}\right) = \frac{n \sqrt[4]{\frac{1}{3n^2}}}{1 + \frac{n^2}{3n^2}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}} \sqrt{n}$ . Donc  $c = \frac{3}{4\sqrt[4]{3}}$  convient.



### Exercice 14 (Chapitre 15, exercice 16)

Pour tout  $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ , on note  $\text{dom}(P)$  son coefficient dominant.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $\text{deg}(T_n) = n$  et  $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$ . »

Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

- Pour  $n = 1$ ,  $T_1 = X$  donc  $\text{deg}(T_1) = 1$  et  $\text{dom}(T_1) = 1 = 2^0$ .  
 Pour  $n = 2$ ,  $T_2 = 2X^2 - 1$  donc  $\text{deg}(T_2) = 2$  et  $\text{dom}(T_2) = 2 = 2^{2-1}$ . Ainsi  $\mathcal{P}(1)$  et  $\mathcal{P}(2)$  sont vraies.

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies.  
On a  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$  donc  $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n)$ .  
Or,  $\deg(T_n) = n$ ,  $\deg(2XT_{n+1}) = \deg(2X) + \deg(T_{n+1}) = \deg(X) + \deg(T_{n+1}) = n+2$   
donc  $\deg(T_n) < \deg(2XT_{n+1})$ .  
Ainsi,  $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)) = \deg(2XT_{n+1}) = n+2$ .  
De plus, comme  $\deg(T_n) < \deg(2XT_{n+1})$ , le coefficient dominant de  $T_{n+2}$  est celui du polynôme  $2XT_{n+1}$ .  
D'où  $\text{dom}(T_{n+2}) = \text{dom}(2XT_{n+1}) = 2\text{dom}(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ .  
Ainsi,  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.
- Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\deg(T_n) = n$  et  $\text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$ .

De plus, on a :  $\deg(T_0) = 0$  et  $\text{dom}(T_0) = 1$ .

2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la propriété  $\mathcal{Q}(n)$  : «  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ . »

Montrons par récurrence d'ordre 2 que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie.

- Pour  $n = 0$ ,  $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$ .  
Pour  $n = 1$ ,  $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ .  
Ainsi,  $\mathcal{Q}(0)$  et  $\mathcal{Q}(1)$  sont vraies.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $\mathcal{Q}(n)$  et  $\mathcal{Q}(n+1)$  sont vraies.

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &\stackrel{HR}{=} 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(n\theta)(2\cos(\theta)^2 - 1) - \sin(n\theta)(2\cos(\theta)\sin(\theta)) \\ &= \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{Q}(n+2)$  est vraie.

- On a donc prouvé par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie.

Montrons désormais l'unicité.

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .

On a alors :  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $P(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta))$ .

Donc :  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $(P - T_n)(\cos(\theta)) = 0$ . Or,  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  est surjective.

Ainsi :  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $(P - T_n)(x) = 0$ .

Donc  $P - T_n$  admet une infinité de racines (distinctes). C'est donc le polynôme nul.

On a donc  $P = T_n$ . Ainsi,  $T_n$  est bien l'unique polynôme vérifiant l'égalité souhaitée.

3.  $T_0$  n'admet aucune racine.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminons les racines de  $T_n$ .

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \cos(n\theta) = 0 \\ &\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \frac{\pi}{n} + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

Ainsi, les  $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$  avec  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  sont des racines de  $T_n$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a  $1 \leq 2k+1 \leq 2n-1$ . D'où :  $0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$ .

De plus, la fonction  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  est injective. Ainsi, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , les  $\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$  sont deux à deux distincts. On a ainsi obtenu  $n$  racines distinctes pour  $T_n$  de degré  $n$ . On a donc déterminé toutes les racines de  $T_n$ .



## Problème 4 (Nouveau problème, d'après Centrale PC 2022)

### 1. Polynômes de Lagrange

(a) Soient  $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

- Si  $k = i$ ,  $L_i(a_k) = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$ .

- Si  $k \neq i$ , il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$  tel que  $a_k - a_j = 0$  donc  $L_i(a_k) = 0$ .

Ainsi :

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , posons  $Q = P - \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$ .

- On a  $\deg(P) \leq n-1$  et  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\deg(L_i) = n-1$ .

Donc  $\deg(Q) \leq n-1$ .

- Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} Q(a_k) &= P(a_k) - \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i(a_k) \\ &= P(a_k) - P(a_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $Q$  admet au moins  $n$  racines distinctes.

- Donc  $Q = 0$ , d'où :  $P = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$ .

(c) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\deg(P) \leq n-2$ .

On a  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , donc :  $P = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$  (\*).

Le coefficient en  $X^{n-1}$  dans  $L_i$  est  $\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$  et le coefficient en  $X^{n-1}$  dans  $P$  est 0 donc en égalisant les coefficients

en  $X^{n-1}$  dans (\*), on obtient :

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$$

### 2. Polynômes de Tchebychev

(a)  $(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  et  $(1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ .

En sommant, on obtient :

$$2^n = \sum_{k=0}^n (1 + (-1)^k) \binom{n}{k}$$

Or,  $1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Donc :

$$2^n = \sum_{\substack{k \in [0, n] \\ k \text{ pair}}} 2 \binom{n}{k}$$

D'où, en posant  $k = 2p$  :

$$2^n = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$$

Donc :

$$2^{n-1} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$$

(b) Soit  $p \in \left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]$ ,  $X^{n-2p}(1-X^2)^p$  est un polynôme de degré  $n-2p+2p = n$  de coefficient dominant  $(-1)^p$ .

Donc par combinaison linéaire,  $\deg(T_n) \leq n$  et le coefficient en  $X^n$  dans  $T_n$  est

$$\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} (-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} \neq 0.$$

Ainsi,  $\deg(T_n) = n$  et le coefficient dominant de  $T_n$  est  $2^{n-1}$ .

(c) • Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \operatorname{Re} \left( e^{in\theta} \right) = \operatorname{Re} \left( (e^{i\theta})^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( (\cos\theta + i \sin\theta)^n \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \sin\theta)^k (\cos\theta)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

Or :  $i^k \in \mathbb{R}$  si  $k$  est pair et  $i^k \in i\mathbb{R}$  si  $k$  est impair. Donc :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \sum_{\substack{k \in \{0, n\} \\ k \text{ pair}}} i^k \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) \sin^k \theta \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i^{2p} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p} \theta \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) (1 - \cos^2 \theta)^p \\ &= T_n(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

$T_n$  vérifie bien la relation.

• Unicité :

Soit  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, Q_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ .

Alors :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, (T_n - Q_n)(\cos(\theta)) = 0$ .

Or :  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  est surjectif. Ainsi :  $\forall x \in [-1, 1], (T_n - Q_n)(x) = 0$ .

Donc  $T_n - Q_n$  admet une infinité de racines distinctes. Donc  $T_n - Q_n = 0$ .

Ainsi  $T_n = Q_n$ .

• Ainsi  $T_n$  est l'unique polynôme tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ .

(d) Soit  $k \in [1, n]$ ,

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= T_n \left( \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \right) \\ &= \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left( k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $x_k$  est racine de  $T_n$ . De plus,  $\frac{(2k-1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$  et  $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  est injectif. Donc les  $x_k$  sont deux à deux distincts.

Ainsi,  $x_1, \dots, x_n$  sont  $n$  racines de  $T_n$  qui est de degré  $n$ . Donc  $T_n$  est scindé et son coefficient dominant est  $2^{n-1}$ .

Donc  $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ .

### 3. Une première inégalité

(a) • en utilisant la question 2.c,  $\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |T_n(\cos\theta)| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |\cos(n\theta)|$  car  $\{\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$ .

Ainsi :  $\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1$ .

- Posons  $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$  alors  $\deg(W) = \deg(T_n) = n$  et  $W$  est unitaire.

$$\text{De plus, } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc  $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$  vérifie l'égalité.

- (b) •  $\deg(T_n) = n$  et  $\deg W = n$ , donc  $\deg(Q) \leq n$ .
- Le coefficient en  $X^n$  dans  $Q$  est  $\frac{1}{2^{n-1}} 2^{n-1} - 1 = 0$
- Donc  $\deg(Q) \leq n-1$
- (c) i. Soit  $k \in [0, n]$ ,

$$\begin{aligned} Q(z_k) &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n(z_k) - W(z_k) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - W(z_k) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cos(k\pi) - W(z_k) \quad \text{avec la question 2.c} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} (-1)^k - W(z_k) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } -\frac{1}{2^{n-1}} < W(z_k) < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc :

- si  $k$  est pair  $Q(z_k) = \frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) > 0$ .
- si  $k$  est impair  $Q(z_k) = -\frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) < 0$ .

- ii. Soit  $k \in [0, n-1]$ , la fonction polynomiale associée à  $Q$  est continue sur  $]z_{k+1}, z_k[$  et 0 est compris entre  $Q(z_k)$  et  $Q(z_{k+1})$  donc d'après le TVI, il existe  $c_k \in ]z_{k+1}, z_k[$  tel que :  $Q(c_k) = 0$ .
- iii. On a  $z_n < c_{n-1} < z_{n-1} < \dots < z_1 < c_0 < z_0$  donc  $c_0, \dots, c_{n-1}$  sont  $n$  racines distinctes de  $Q$ .
- Or,  $\deg(Q) \leq n-1$ , donc  $Q = 0$ .

$$\text{Ainsi : } W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n \text{ ce qui est absurde car } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}} = \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right|.$$

$$\text{Ainsi : } \sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et (1) est prouvée.}$$

- (d) i. • Soit  $k \in [0, n]$ , de même qu'à la question 1.c.i  $Q(z_k) \geq 0$  si  $k$  est pair et  $Q(z_k) \leq 0$  si  $k$  est impair.
- Soit  $j \in [0, n]$ ,  $(z_k)_{k \in [0, n]}$  est décroissante par décroissance de  $\cos$  sur  $[0, \pi]$ . Donc  $z_k - z_j > 0$  si  $k < j$  et  $z_k - z_j < 0$  si  $k > j$ .

Donc  $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (z_k - z_j)$  est le produit de  $k$  termes négatifs ( $j \in [0, k-1]$ ) et de  $n-k$  termes positifs ( $j \in [k+1, n]$ ).

Ainsi, ce produit a même signe que  $(-1)^k \times 1^{n-k} = (-1)^k$ .

Donc ce produit est positif si  $k$  est pair et négatif si  $k$  est impair.

- Par produit  $\frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} \geq 0$ .

- ii. En appliquant 1.c à  $n+1$ , aux points  $z_0, \dots, z_n$  et au polynôme  $Q$  qui vérifie  $\deg(Q) \leq (n+1) - 2 = n-1$ , on a :
- $$\sum_{k=0}^n \frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} = 0.$$

Or, il s'agit d'une somme de nombres positifs, donc :

$$\forall k \in [0, n], \frac{Q(z_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (z_k - z_j)} = 0.$$

Donc :  $\forall k \in [0, n], Q(z_k) = 0$ .

Ainsi  $Q$  admet au moins  $n+1$  racines distinctes  $(z_0, \dots, z_n)$  et  $\deg(Q) \leq n-1$ .

Donc  $Q = 0$  et  $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ .

On a donc égalité dans (1) ssi  $W = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ .