Correction de la séance 7

Equations fonctionnelles

Exercice de calcul *(Chapitre 7, exemple 12)*

Posons :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt).$$

- On a $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{ikt}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikt}\right)$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(e^{ikt}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikt}\right)$.
- On a :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} (e^{it})^k$$

Donc :

– si $e^{it} = 1$, c'est-à-dire si $t \equiv 0\,[2\pi]$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

Donc :

$$A_n = n+1 \text{ et } B_n = 0.$$

– si $e^{it} \neq 1$, c'est-à-dire si $t \not\equiv 0\,[2\pi]$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} &= \frac{1-(e^{it})^{n+1}}{1-e^{it}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)t}{2}} - e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)} = \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}}\,\frac{-2i\sin\frac{(n+1)t}{2}}{-2i\sin\frac{t}{2}}\\ &= e^{i\frac{nt}{2}}\,\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

Donc :

$$A_n = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{nt}{2}}\,\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right) = \frac{\cos\frac{nt}{2}\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

et

$$B_n = \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{nt}{2}}\,\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$$

Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\left|f_n(x) - x\right| = \left|\frac{nx^3}{1+nx^2} - x\right| = \left|\frac{x}{1+nx^2}\right| = \frac{|x|}{1+nx^2}.$$

Or :

- si $|x| > \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $1+nx^2 > nx^2 > 0$ donc :
$$\left|f_n(x) - x\right| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$
- si $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors :
$$\left|f_n(x) - x\right| \leq |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n(x) - x\right| \leq u_n$ et $\lim u_n = 0$ donc (u_n) convient.

Problème 5 *(Devoir libre 15)*

1. En appliquant l'hypothèse à $x = y = 0$, on a : $f(0) = f(0) + f(0) + 0$ donc :
$$f(0) = 0.$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant l'hypothèse à x et $-x$, on a :$f(x-x) = f(x) + f(-x) - x^2$ donc, comme $f(0) = 0$:
$$f(-x) = -f(x) + x^2.$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Pour $n = 0$, $f(nx) = f(0) = 0$ et $nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 = 0$ donc :
$$f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2$. On a :
$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= f(nx+x) \\ &= f(nx) + f(x) + nx.x \quad \text{par hypothèse sur } f \\ &= nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 + f(x) + nx^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)f(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 \\ &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(2n+1)x^2 + \frac{1}{2}n^2x^2 \\ &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(2n+1+n^2)x^2 \\ &= (n+1)f(x) - \frac{1}{2}(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(n+1)^2x^2 \end{aligned}$$
   - Donc, par récurrence :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$
4. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.
   - si $n \in \mathbb{N}$, le résultat est vrai d'après 3.

- si $n < 0$, alors $-n \in \mathbb{N}$ donc, d'après 3. :

$$f(-nx) = -nf(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

  Or, d'après 2. $f(-nx) = -f(nx) + n^2x^2$. Ainsi :

$$-f(nx) + n^2x^2 = -nf(x) + \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

  Donc :

$$f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

- Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2.$$

5. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que : $x = \dfrac{p}{q}$.
   D'après 4 :

$$f(qx) = qf(x) - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}q^2x^2.$$

   Or :

$$f(qx) = f(p) = f(p.1) = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2.$$

   Donc :

$$qf(x) - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}q^2x^2 = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2.$$

   Donc :

$$qf(x) - \frac{1}{2}\frac{p^2}{q} + \cancel{\frac{1}{2}p^2} = pf(1) - \frac{1}{2}p^2 + \cancel{\frac{1}{2}p^2}.$$

   Donc :

$$qf(x) = pf(1) - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q}.$$

   Ainsi :

$$f(x) = \frac{p}{q}f(1) - \frac{1}{2}\frac{p}{q} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q^2} = xf(1) - \frac{1}{2}x + frac12x^2.$$

   Donc :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + f(1)x.$$

6. - Posons $\lambda = f(1) - \frac{1}{2}$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

   - Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe (x_n) suite de rationnels telle que $\lim x_n = x$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $x_n \in \mathbb{Q}$, alors :

$$f(x_n) = \frac{1}{2}x_n^2 + \lambda x_n.$$

     Comme f est continue, $\lim f(x_n) = f(x)$ donc, par passage à la limite :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

   - Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

7. - Analyse : Supposons qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

     D'après les questions précédentes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x.$$

- <u>Synthèse</u> : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \lambda x$. Alors $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et, soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) + xy &= \frac{1}{2}x^2 + \lambda x + \frac{1}{2}y^2 + \lambda y + xy \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \lambda(x+y) \\ &= \frac{1}{2}(x+y)^2 + \lambda(x+y) \\ &= f(x+y) \end{aligned}$$

  Donc f convient.
- Donc les solutions sont :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x^2 + \lambda x \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problème 6 *(Devoir libre 15)*

<u>Première méthode :</u>

1. Soit f la fonction constante nulle.
   Il est clair que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que f vérifie (1). Ainsi $f \in E$.
   Donc :
$$E \neq \emptyset$$
2.
   - Comme f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, il est clair que g l'est également.
   - Soient $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} g(x) + g(y) & = & f(x) - f(0) + f(y) - f(0) \\ & = & f(x) + f(y) - 2f(0) \\ & = & 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - 2f(0) \\ & = & 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0)\right) \\ & = & 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{array}$$
     Ainsi g vérifie (1).
   - D'où :
$$g \in E$$
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $y = -x$ dans (1), on a :
$$f(x) + f(-x) = 2f(0) = 0.$$
   Donc :
$$f(-x) = -f(x).$$
   Ainsi f est impaire.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = x+2$ dans (1), on a :
$$f(x) + f(x+2) = 2f\left(\frac{x+x+2}{x}\right) = 2f(x+1).$$
   Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2) = 2f(x+1) - f(x)$$

   (c)
   - Posons :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$$
     Alors, comme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+2) = 2f(n+1) - f(n),$$
     on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette relation est :

$$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.$$

Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + \mu n.$$

Or $u_0 = f(0) = 0$, ainsi $\lambda = 0$.
Et $u_1 = f(1) = a$, ainsi $\mu = a$.
D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = u_n = an.$$

- Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m < 0$.
  Comme f est impaire, on a :

$$f(m) = -f(-m)$$

  Et comme $-m \in \mathbb{N}$, on a , d'après le point précédent :

$$f(-m) = a(-m).$$

  Donc :

$$f(m) = -a(-m) = am.$$

- On a alors :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ f(m) = am.$$

(d) - Soit $x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$ dans (1), on a :

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

  Donc :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$$

- Pour $p = 0$,

$$f\left(\frac{1}{2^p}\right) = f(1) = a = \frac{a}{2^p}$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que :

$$f\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{a}{2^p}.$$

  On a :

$$\begin{array}{rcll} f\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right) & = & f\left(\dfrac{1/2^p}{2}\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2^p}\right) & \text{d'après le premier point} \\ & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2^p} & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & \dfrac{a}{2^{p+1}} & \end{array}$$

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{1}{2^p}\right) = a\frac{1}{2^p}.$$

(e) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrons par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p}f(n).$$

- Pour $p = 0$,

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = f(n) = \frac{1}{2^p}f(n)$$

- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que :

$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p}f(n).$$

  On a :

$$\begin{array}{rcll} f\left(\frac{n}{2^{p+1}}\right) & = & f\left(\dfrac{n/2^p}{2}\right) & \\ & = & \dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{n}{2^p}\right) & \text{d'après le premier point} \\ & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^p}f(n) & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & \dfrac{1}{2^{p+1}}f(n) & \end{array}$$

- On a donc prouvé par récurrence que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} f(n).$$
- Soient $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, comme d'après 3.(c), $f(n) = an$, on a :
$$f\left(\frac{n}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} f(n) = \frac{1}{2^p} an = a\frac{n}{2^p}.$$
- On a ainsi, par définition de D :
$$\forall x \in D,\ f(x) = ax.$$

(f) i. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\lfloor 2^n x_0 \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :
$$u_n = \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{n} \in D$$
Ainsi, (u_n) est à valeurs dans D.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\lfloor 2^n x_0 \rfloor \leq 2^n x_0 < \lfloor 2^n x_0 \rfloor + 1$$
Donc :
$$\frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n} \leq x_0 < \frac{\lfloor 2^n x_0 \rfloor}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$
Ainsi :
$$u_n \leq x_0 < u_n + \frac{1}{2^n}.$$
D'où :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_0 - \frac{1}{2^n} < u_n \leq x_0.$$
De plus :
$$\lim_{n\to+\infty} x_0 - \frac{1}{2^n} = x_0,$$
donc, par théorème d'encadrement, (u_n) converge et :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0.$$

iii. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et f est continue en x_0, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0).$$
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$, donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = au_n$$
Ainsi :
$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} au_n$$
Donc :
$$f(x_0) = ax_0.$$

(g)
- Soit $f \in E$, soit g définie comme à la question 2, alors $g \in E$ et $g(0) = 0$, donc d'après les question précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax$$
De plus, comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + f(0)$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b.$$
- Réciproquement, posons :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,$$
avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et de plus, soient $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} f(x) + f(y) & = & ax + b + ay + b \\ & = & a(x+y) + 2b \\ & = & 2\left(a\frac{x+y}{2} + b)\right) \\ & = & 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{array}$$
Ainsi f vérifie (1).
Donc $f \in E$.

- On a donc :

$$E = \{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Seconde méthode :

4. Soit $x \in [0,1]$,
   - Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$ donc $2x \in [0,1]$.
   - Si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, alors $1 < 2x \leq 2$ donc $2x-1 \in [0,1]$.
   - On a donc :

$$\forall x \in [0,1], 2x \in [0,1] \text{ ou } 2x-1 \in [0,1].$$

5. (a) f est continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée et atteind ses bornes.
   Ainsi il existe $c, d \in [0,1]$ tels que :

$$f(c) = \max_{[0,1]} f \text{ et } f(d) = \min_{[0,1]} f.$$

   On a alors :

$$\forall x \in [0,1],\ f(d) \leq f(x) \leq f(c).$$

   (b)
   - On applique (1) à $x = 2c \in [0,1]$ et $y = 0$. On a alors :

$$f(2c) + f(0) = 2f(c)$$

     Or $f(2c) \leq f(c)$ donc :

$$2f(c) \leq f(0) + f(c)$$

     D'où :

$$f(c) \leq f(0).$$

     De plus, d'après 5.(a), $f(0) \leq f(c)$, donc :

$$f(0) = f(c).$$

   - On applique (1) à $x = 2d \in [0,1]$ et $y = 0$. On a alors :

$$f(2d) + f(0) = 2f(d)$$

     Or $f(2d) \geq f(d)$ donc :

$$2f(d) \geq f(0) + f(d)$$

     D'où :

$$f(d) \geq f(0).$$

     De plus, d'après 5.(a), $f(0) \geq f(d)$, donc :

$$f(0) = f(d).$$

   - On a donc :

$$f(c) = f(d) = f(0).$$

   - Comme :

$$\forall x \in [0,1],\ f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$

     on a : f est constante.

   (c)
   - Si $c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on applique (1) à $x = 2c-1 \in [0,1]$ et $y = 1$. On a alors :

$$f(2c-1) + f(1) = 2f(c)$$

     Or $f(2c-1) \leq f(c)$ donc :

$$2f(c) \leq f(1) + f(c)$$

     D'où :

$$f(c) \leq f(1).$$

     De plus, d'après 5.(a), $f(1) \leq f(c)$, donc :

$$f(1) = f(c).$$

- Si $d \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on applique (1) à $x = 2d - 1 \in [0,1]$ et $y = 1$. On a alors :
$$f(2d-1) + f(1) = 2f(d)$$
Or $f(2d-1) \geq f(d)$ donc :
$$2f(d) \geq f(1) + f(d)$$
D'où :
$$f(d) \geq f(1).$$
De plus, d'après 5.(a), $f(1) \geq f(d)$, donc :
$$f(1) = f(d).$$
- Comme on a, $f(0) = f(1)$, on a donc, dans tous les cas :
$$f(c) = f(d).$$
- Comme :
$$\forall x \in [0,1],\ f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$
on a : f est constante.

6. - Soient $x, y \in [0,1]$,
$$\begin{aligned} h(x) + h(y) &= f(x) - (f(1) - f(0))x + f(y) - (f(1) - f(0))y \\ &= f(x) + f(y) - (f(1) - f(0))(x+y) \\ &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - (f(1) - f(0))(x+y) \\ &= 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - (f(1) - f(0))\frac{x+y}{2}\right) \\ &= 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$
Donc h vérifie (1).
   - Comme f est continue sur $[0,1]$, h l'est également, on a alors :
$$h \in E'$$
.
   - On a :
$$h(0) = f(0)$$
et
$$h(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) = f(0) = h(0)$$
Donc h vérifie les hypothèse de la question 5, donc h est constante.

7. - Soit $f \in E'$, alors, d'après la question précédente, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) - (f(1) - f(0))x = b$$
Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = ax + b$$
   - De même que pour la question 3, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = ax + b$$
alors $f \in E'$.
   - On a donc :
$$E' = \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$