


Limites d'intégrales

 **Exercice de calcul** (Chapitre 25, exemple 11)

- $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 t \cdot 1^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Posons $f_1 = \sqrt{2}$.
- $g_1 = X - (X|f_1)f_1 = X - 2 \int_0^1 t \cdot t dt = X - \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \|X - \frac{2}{3}\| &= \sqrt{\int_0^1 t \cdot (t - \frac{2}{3})^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{9}t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Posons $f_2 = 6(X - \frac{2}{3})$.

- (f_1, f_2) est l'orthonormalisation de la base canonique.

Inégalité

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

- si $x \leq 1$, $|f_n(x)| = \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \leq x^n \leq 1$,
- si $x > 1$, $|f_n(x)| = \frac{x^n}{x^{n+2} + 1} \leq \frac{x^n}{x^{n+2}} \leq \frac{1}{x^2}$.

Posons $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$ Alors g est continue sur \mathbb{R}^+ , $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, |f_n(x)| \leq g(x)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ donc g convient.



Exercice 16 (Chapitre 18, exemple 1)

f est continue sur le segment $[0, 1]$ ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$.
Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq \int_0^1 t^n M dt \leq \frac{M}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0.$$



Exercice 17 (Chapitre 18, exemple 2)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

On effectue l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t) & u'(t) &= f'(t) \\ v'(t) &= \sin(nt) & v(t) &= -\frac{1}{n} \cos(nt) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt &= \left[-\frac{f(t) \cos(nt)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \\ &= -\frac{f(b) \cos(nb) + f(a) \cos(na)}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt \leq \frac{|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt}{n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt}{n} \right) = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$



Exercice 18 (Chapitre 18, exemple 3)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t} dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{e^t - 1}{t} dt + \ln 2.$$

Or $\frac{e^t - 1}{t} = 1 + o(1)$ et, soit F une primitive de $t \mapsto \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, on a :

$$F(x) = F(0) + x + o(x).$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$. Or

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = F(x) - F(0) + \ln 2.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2.$$



Exercice 19 (Chapitre 18, exercice 11)

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite de f en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geq A$

$$\begin{aligned} |F(x) - l| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - l \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - l) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - l) dt + \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - l) dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - l) dt \right| + \left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - l) dt \right| \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_A^x (f(t) - l) dt \right| &\leq \left| \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - l| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x|} \left| \int_A^x \varepsilon dt \right| \\ &\leq \varepsilon \frac{|x - A|}{|x|} \\ &\leq \varepsilon \frac{x - A}{x} \quad \text{car } x \geq A \text{ et } x > 0 \\ &\leq \varepsilon \frac{x}{x} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

De plus, $\left| \int_0^A (f(t) - l) dt \right|$ est une constante (ne dépend pas de x). Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \int_0^A (f(t) - l) dt \right| \frac{1}{|x|} = 0$.

Donc il existe $B \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq B \implies \left| \frac{1}{x} \int_0^A (f(t) - l) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq \max(A, B) \implies |F(x) - l| \leq 2\varepsilon$$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$.

