Indications
DM 13

1. Prendre l'exemple le plus naturel.
2. Déterminer $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)^{\perp}$.
3. Calculer et simplifier.
4. Calculer $(T(x)|x)$ puis déterminer $\ker(T)$.
5. Appliquer l'inégalité précédente à $T^{-1}(x)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
6. Utiliser l'unicité dans le résultat admis.
7. (a) Utiliser la bilinéarité du produit scalaire.
   (b) Utiliser la question précédente.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\,\tilde{\Phi} \cap (\mathrm{Im}\,\Phi)^{\perp} = \{0\}$ et raisonner ensuite sur les dimensions.
8. (a) Il faut montrer les deux inclusions. Pour $(\mathrm{Im}\,\Phi)^{\perp} \subset \ker(\Psi)$, utiliser : $\forall x \in E,\ h \in F,\ (\Psi(h)|x) = (h|\Phi(x))_F$.
   (b) C'est la définition.
   (c) C'est du cours.
   (d) Calculer $\Phi(y)$
   (e) Se ramener à la question précédente en s'inspirant des preuves faites pour écrire les solutions d'une équation avec second membre en fonction des solutions de l'équation homogène associée.