Indications
DM 6

Problème 1 :
Soit m un réel strictement positif, soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité d'ordre 3.

1. (a) Calculer M^2.
   (b) A l'aide de la relation précédente, trouver une matrice dont le produit avec M donne I.
   (c) Montrer que $M^2X = \lambda^2 X$ et en déduire que λ est racine d'une équation du second degré.
2. (a) Calculer !
   (b) Faire une récurrence.
   (c) Commencer par exprimer M en fonction de P et Q puis utiliser la formule du binôme de Newton.
   (d) Remplacer P et Q par leurs valeurs.
   (e) Comparer les résultats de 2.(d) et 1.(b).

Problème 2 :

1. (a) Appliquer (*) à deux valeurs bien choisies.
   (b) Appliquer (*) à deux valeurs bien choisies.
2. (a) Montrer que $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$.
   (b) Raisonner par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ puis utiliser le résultat pour $-n$ pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$.
   (c) Appliquer la question précédente à $x^{1/q}$.
   (d) Utiliser les deux questions précédentes.
   (e) Ecrire x comme la limite d'une suite de rationnels et utiliser la continuité de f.
   (f) Appliquer la question précédente à $\ln(x)$.
3. La conclusion est souvent une analyse-synthèse dont une partie est déjà traitée.