Indications
DM 7

Problème 1 :

1. (a) Raisonner par récurrence.
   L'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_n' apparaît lorsqu'on pose P_{n+1} dans l'hérédité.
   (b)
   (c) La question précédente permet d'avoir l'intuition du résultat à prouver. La preuve se fait ensuite par récurrence.
2. (a)
   (b) La question précédente donne $g^{(n)} = 0$.
   On reprend ensuite de calcul de $g^{(n)}$ en appliquant la formule de Leibniz à $x \mapsto 1 + x^2$ et f'' ainsi qu'à $x \mapsto 2x$ et f'.
   (c) Il suffit de passer de la fonction polynomiale au polynôme.
   (d) On a l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_n' donc celle de P_{n+2} en fonction de P_{n+1} et P_{n+1}'. Exprimer alors P_{n+1}' en fonction de P_n, P_n' et P_n''
3. (a) Raisonner par récurrence et penser aux formules de trigonométrie directe et réciproque.
   (b) Il faut résoudre $f^{(n)}(x) = 0$. On trouve d'abord les valeurs de $f(x)$ en utilisant $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis celle de x.
   (c) Compter les racines trouvées à la question précédente et ne pas oublier le coefficient dominant.
4. (a) Avoir l'intuition de la formule et la montrer par récurrence.
   (b) Factoriser le dénominateur dans $\mathbb{C}$ et faire apparaître ses facteurs au numérateur.
   (c) Utiliser la formule du binôme de Newton pour obtenir une expression réelle en remarquant qu'une partie des termes de la somme obtenue est nulle.
   (d) Il suffit de passer de la fonction polynomiale au polynôme.
5. (a) Etudier le signe de f'''.
   (b) On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. Appliquer une première fois l'inégalité des accroissements finis à g' puis une deuxième fois à g sur $[0, \frac{k}{n^2}]$.
   (c) Forcer l'apparition de $\sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} \right)$ et utiliser l'inégalité triangulaire.
   (d) La somme restante est connue.