

# Chapitre 10 : Ensembles et applications

## I Ensembles

### 1.1 Appartenance, inclusion

#### Définition 1

L'ensemble vide, noté  $\emptyset$  est l'ensemble ne contenant aucun élément.

#### Définition 2

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.

On dit que  $F$  est **inclus** dans  $E$  et on note  $F \subset E$  ssi tous les éléments de  $F$  appartiennent à  $E$ , c'est à dire :

$$\forall x \in F, x \in E.$$

#### Proposition 1

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.

La négation de l'inclusion s'écrit  $E \not\subset F$  et on a :

$$E \not\subset F \Leftrightarrow \exists x \in E, x \notin F,$$

c'est-à-dire il existe un élément de  $E$  qui n'est pas dans  $F$ .

#### Proposition 2

Soient  $E, F$  deux ensembles. On a :

$$E = F \quad \text{si et seulement si} \quad E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

#### Méthode 1 (inclusion et égalité d'ensembles)

- Pour montrer que  $F \subset E$ , le modèle de rédaction est :  
Soit  $x \in F$ .  
*Raisonnement*  
Alors,  $x \in E$ .  
On a donc  $F \subset E$ .
- Montrer que  $E = F$  :  
Sauf dans les cas simples, où l'on peut montrer directement que  $x \in E$  équivaut à  $x \in F$  par équivalence, on raisonnera souvent par double inclusion pour montrer une égalité d'ensemble.

⇨ **Exemple 1 :** Montrer que :

$$\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} = ]-\infty, 0].$$

### 1.2 Sous-ensemble

#### Définition 3

Soit  $E$  un ensemble.

On dit que  $F$  est une partie de  $E$  ou que  $F$  est un sous-ensemble de  $E$  ssi  $F \subset E$

On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

**Remarque :**

- Ecrire "soit  $A \subset E$  est équivalent à écrire "soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ ".
- On a toujours  $\emptyset \subset E$  et  $E \subset E$  donc :  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$  et  $E \in \mathcal{P}(E)$ .

⇨ **Exemple 2 :** Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  pour  $E = \{1, 2\}$  et  $E = \emptyset$ .

### 1.3 Opérations sur les parties d'un ensemble

#### Définition 4

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

1. L'**intersection** de  $A$  et  $B$ , noté  $A \cap B$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à la fois à  $A$  et à  $B$  :

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$$

2. La **réunion** de  $A$  et  $B$ , noté  $A \cup B$ , est l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à  $A$  ou à  $B$  :

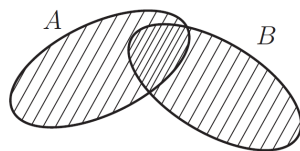
$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

3. La différence de  $A$  et  $B$ , noté  $A \setminus B$ , est l'ensemble des éléments de  $A$  qui ne sont pas dans  $B$ .

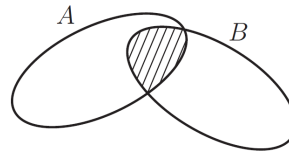
$$A \setminus B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in A, x \notin B\}$$

4. le **complémentaire** de  $A$  dans  $E$ , noté  $E \setminus A$  ou  $\bar{A}$  ou  $A^c$  est l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .

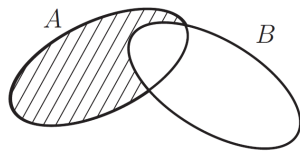
$$E \setminus A = \bar{A} = A^c = \{x \in E, x \notin A\}$$



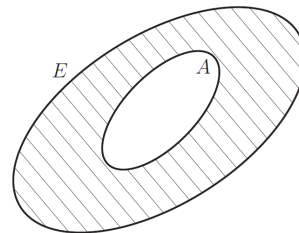
(a) Schéma de  $A \cup B$



(b) Schéma de  $A \cap B$



(c) Schéma de  $A \setminus B$



(d) Schéma de  $\bar{A}$

#### Définition 5

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

$A$  et  $B$  sont dits **disjoints** ssi :

$$A \cap B = \emptyset.$$

#### Proposition 3

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On a :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \text{ et } A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

*Preuve.*

□

**Proposition 4 (Propriétés algébriques de l'intersection et l'union)**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois parties d'un ensemble  $E$ .

1. L'intersection et l'union sont **commutatives** :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

2. L'intersection et l'union sont **associatives** :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

On pourra omettre les parenthèses et noter  $A \cap B \cap C$  l'ensemble des éléments communs aux trois sous-ensembles  $A, B$  et  $C$  et noter  $A \cup B \cup C$  l'ensemble des éléments qui sont dans l'un au moins des trois sous-ensembles  $A, B$  ou  $C$ .

3.  $A \cap E = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup E = E \quad A \cup \emptyset = A.$

4. L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une par rapport à l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

*Preuve.* 1. Montrons que :  $A \cap B = B \cap A$ . On a :

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in E, x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C)\} \\ &= \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \in C\} \\ &= \{x \in E, (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

2. Montrons que :  $A \cap B = B \cap A$ . On a :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\} \\ &= \{x \in E, x \in B \text{ et } x \in A\} \\ &= B \cap A. \end{aligned}$$

3. Montrons que :  $A \cup E = E$ .

On a  $E \subset A \cup E \subset E$ . Donc  $A \cup E = E$ .

4. Montrons que :  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

Soit  $x \in E$ , on a :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ et } B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Montrons que :  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

Soit  $x \in E$ , on a :

$$\begin{aligned}
 x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \\
 &\iff x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\
 &\iff (x \in A \text{ ou } B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } C) \\
 &\iff (x \in A \cup B) \text{ et } (x \in A \cup C) \\
 &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
 \end{aligned}$$

□

⇒ **Exemple 3 :** Soit  $E$  un ensemble, soient  $A, B, C$  des parties de  $E$ . Montrer que :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

#### Proposition 5 : Propriétés algébriques du complémentaire

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

1.  $\overline{\emptyset} = E, \overline{E} = \emptyset$ .
2.  $A \cup \overline{A} = E$  et  $A \cap \overline{A} = \emptyset$ .
3.  $\overline{\overline{A}} = A$
4.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
5.  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

*Preuve.* 3. Montrons  $A = \overline{\overline{A}}$  par double inclusion.

- Soit  $x \in \overline{\overline{A}}$  alors  $x \notin \overline{A}$  donc  $x \in A$ .
- Soit  $x \in A$  alors  $x \notin \overline{A}$  donc  $x \in \overline{\overline{A}}$ .

Ainsi,  $A = \overline{\overline{A}}$ .

4. Montrons par double inclusion que  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

- Soit  $x \in \overline{A \cup B}$ .  
On a  $\text{non}(x \in A \cup B)$ . Donc  $\text{non}(x \in A \text{ ou } x \in B)$ .  
Ainsi,  $\text{non}(x \in A)$  et  $\text{non}(x \in B)$ .  
Donc  $x \notin A$  et  $x \notin B$ .  
D'où  $x \in \overline{A}$  et  $x \in \overline{B}$ . Donc  $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ .
- Soit  $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ . Alors  $x \in \overline{A}$  et  $x \in \overline{B}$ .  
Raisonnons par l'absurde et supposons que  $x \in A \cup B$ . Alors  $x \in A$  ou  $x \in B$ .  
Si  $x \in A$  alors  $x \notin \overline{A}$  ce qui est absurde.  
Si  $x \in B$  alors  $x \notin \overline{B}$  ce qui est absurde.  
Ainsi,  $x \notin A \cup B$  donc  $x \in \overline{A \cup B}$ .

On obtient donc  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .

5.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}}$ .

D'où  $\overline{A \cap B} = \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

□

⇒ **Exemple 4 :** Soit  $E$  un ensemble, soient  $A, B, C$  des parties de  $E$ .

1. Montrer que :  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .
2. Exprimer  $A \setminus (B \setminus C)$  en fonction de  $A \setminus B$  et  $A \cap C$ .
3. On suppose que  $A \setminus B = C$ . Montrer que  $A \cup B = B \cup C$ .

#### Proposition 6

Soient  $A, B$  et  $C$  des parties d'un ensemble  $E$ .

$$A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C,$$

$$A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C.$$

Preuve.

□

#### Proposition 7

Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un ensemble  $E$ .

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 5 :** Soit  $E$  un ensemble, soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Résoudre l'équation d'inconnue  $X \in \mathcal{P}(E)$  l'équation :

$$X \cup A = B.$$

## 1.4 Recouvrement disjoint, partition

#### Définition 6

Soient  $E$  un ensemble, soit  $I$  un ensemble, soient, pour tout  $i \in I$ ,  $A_i \in \mathcal{P}(E)$ . On définit :

- la réunion des  $(A_i)_{i \in I}$  par :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$$

- l'intersection des  $(A_i)_{i \in I}$  par :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$$

⇔ **Exemple 6 :** Posons :  $\forall i \in \mathbb{N}^*, A_i = \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right]$ . Montrons que :

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = \{0\} \text{ et } \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i = [-1, 1].$$

### Définition 7

Soient  $E$  un ensemble, soit  $I$  un ensemble, soient, pour tout  $i \in I$ ,  $A_i \in \mathcal{P}(E)$ . On dit :

- les  $(A_i)_{i \in I}$  sont deux à deux disjoints ssi :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

- les  $(A_i)_{i \in I}$  sont un recouvrement disjoint de  $E$  ssi les  $(A_i)_{i \in I}$  sont deux à deux disjoints et  $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ .
- les  $(A_i)_{i \in I}$  sont une partition de  $E$  ssi les  $(A_i)_{i \in I}$  sont deux à deux disjoints, non vides et  $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ .

## 1.5 Produit cartésien

### Définition 8

- Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

Etant donné  $x \in E$  et  $y \in F$ , on construit le couple  $(x, y)$  de sorte que :

$$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, (x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

On appelle **produit cartésien** de  $E$  et  $F$  et on note  $E \times F$ , l'ensemble des couples  $(x, y)$  où  $x \in E$  et  $y \in F$  :

$$E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$$

- Plus généralement, soient  $E_1, \dots, E_n$  des ensembles.

Etant donné  $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ , on construit le  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  de sorte que :

$$\forall x_1, x'_1 \in E_1, \dots, \forall x_n, x'_n \in E_n, (x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = x'_i$$

On note  $E_1 \times \dots \times E_n$  l'ensemble des  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  où :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i$  :

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in E_i\}$$

Si  $E_1 = \dots = E_n = E$ , l'ensemble  $E_1 \times \dots \times E_n$  est noté  $E^n$ .

**Remarque :** Les produits cartésiens se représentent par des rectangles.

⇨ **Exemple 7 :** Soient  $E, F, G$  des ensembles. Montrer que :

$$(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G).$$

## II Applications

Dans toute cette partie,  $E, F, G, H$  désignent des ensembles non vides.

### 2.1 Définition

#### Définition 9

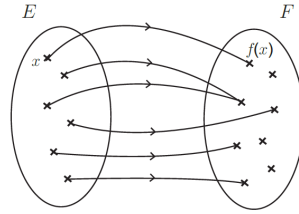
On appelle **application**  $f$  la donnée d'un ensemble de départ  $E$ , d'un ensemble d'arrivée  $F$  et d'une correspondance qui à tout élément  $x$  de  $E$  associe un unique élément de  $F$  noté  $f(x)$ . On la note  $f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ .

Si  $x \in E$  et  $y = f(x)$ , on dit que :

- $y$  est l'image de  $x$  par  $f$
- $x$  est un **antécédent** de  $y$  par  $f$  (pas forcément unique).

On appelle **graphe** de l'application  $f$  l'ensemble des couples  $\{(x, f(x)), x \in E\}$ .

On note  $\mathcal{F}(E, F)$  ou  $F^E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .



## 2.2 Fonction indicatrice

### Définition 10

Soit  $E$  un ensemble et soit  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **fonction indicatrice** de  $A$  et on note  $\mathbb{1}_A$  l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A: E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

### Proposition 8

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensemble de  $E$ .

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$$

*Preuve.*

□

### Proposition 9

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensemble de  $E$ .

$$A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

$$A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$$

*Preuve.*

□

⇔ **Exemple 8 :** Soient  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . Montrer, en utilisant les fonctions indicatrices, que :

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$$

## 2.3 Restriction, égalité, prolongement

### Définition 11 : Egalité de deux applications

Deux applications  $f$  et  $g$  sont égales ssi elles ont même ensemble de départ  $E$ , même ensemble d'arrivée et si :  $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ .

### Définition 12

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

- Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. On appelle **restriction** de  $f$  à  $A$  et on note  $f|_A$  l'application

$$\begin{aligned} f|_A : A &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- On dit que  $f$  est un prolongement de  $g$  ssi  $g$  est une restriction de  $f$ .

**Remarque :** Il n'y a pas d'unicité du prolongement. Par exemple, soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ . Les fonctions suivantes sont des prolongements de  $f$  à  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x & x \mapsto |x| & x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} .$$

## 2.4 Composition

### Définition 13

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ , on appelle composée de  $f$  par  $g$ , notée  $g \circ f$  l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\rightarrow G \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

### Définition 14

On appelle identité de  $E$  et on note  $Id_E$  l'application :

$$\begin{aligned} Id_E : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



**Proposition 10**

Soient  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : G \rightarrow H$ . On a :

- $Id_F \circ f = f$  et  $f \circ Id_E = f$ .
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . Cette application peut alors être notée  $h \circ g \circ f$ .

**Remarque :** En général,  $g \circ f \neq f \circ g$ , même lorsque ces composées ont un sens.

*Preuve.*

□

## 2.5 Familles d'éléments d'un ensemble

**Définition 15**

Soient  $E$  un ensemble et  $I$  un ensemble. On appelle famille d'éléments de  $E$  indexée par  $I$  toute application  $x$  de  $I$  dans  $E$ . L'image de  $i \in I$  est noté  $x_i$  plutôt que  $x(i)$  et on note  $(x_i)_{i \in I}$  une telle famille.

**Définition 16**

Soient  $E$  un ensemble et  $I$  un ensemble.  
L'ensemble  $I$  est appelé l'ensemble des indices de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ .  
La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est dite finie ssi  $I$  est fini.  
On appelle sous-famille de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ , toute famille  $(x_i)_{i \in J}$  où  $J \subset I$ .

**Remarque :** L'ensemble d'indexation est quelconque, les éléments sont dans un ensemble quelconque. Par exemple :

- Posons :  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $x_i = i^2$ . La famille  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est une famille de  $\mathbb{N}$  indexée par  $\mathbb{Z}$ . La famille  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une sous-famille de la famille :  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .
- Posons  $\forall i \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_i = ]-i, i]$ . La famille  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une famille de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  indexée par  $\mathbb{N}^*$ .

## 2.6 Image directe, image réciproque

**Définition 17**

Soient  $f : E \rightarrow F$ .

- Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ , on appelle image directe de  $A$  par  $f$  et on note  $f(A)$  l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}.$$

$$\forall y \in F, y \in f(A) \iff (\exists x \in A, y = f(x))$$

- Soit  $B \in \mathcal{P}(F)$ , on appelle image réciproque de  $B$  par  $f$  et on note  $f^{-1}(B)$  l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

$$\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

**Remarque :** L'image réciproque existe toujours, on peut donc écrire  $f^{-1}$  d'une partie. Par contre, la fonction  $f^{-1}$  n'existe que pour les applications bijectives, donc, en général, on ne peut pas écrire  $f^{-1}$  seule ou  $f^{-1}$  d'un élément.

⇨ **Exemple 9 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto |x|$ .

- Déterminer  $f([-1, 2])$ .
- Déterminer  $f^{-1}([-1, 2])$ .

⇨ **Exemple 10 :** Soit  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ . Déterminer  $f^{-1}(i\mathbb{R})$ .

⇨ **Exemple 11 :** Soit  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ , soient  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $B \in \mathcal{P}(F)$ . Montrer que :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

### III Injection, surjection, bijection

#### 3.1 Généralités

##### Définition 18

Soit  $f: E \rightarrow F$ , on dit que  $f$  est :

- **injective** (ou est une injection) si tout élément de  $F$  admet au plus un antécédent par  $f$  dans  $E$ , c'est à dire lorsque :

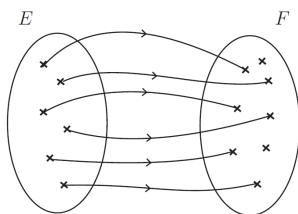
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

- **surjective** (ou est une surjection) si tout élément de  $F$  admet au moins un antécédent par  $f$  dans  $E$ , c'est à dire lorsque :

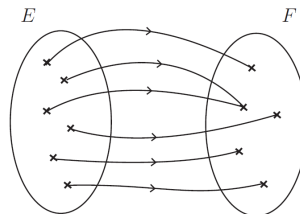
$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

- **bijective** (ou est une bijection) si  $f$  est injective et surjective c'est-à-dire si tout élément de  $F$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $E$ , c'est à dire lorsque :

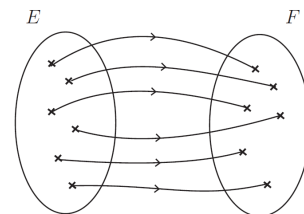
$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$



(e) Application injective



(f) Application surjective



(g) Application bijective

⇨ **Exemple 12 :** Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de :

1. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (x, 2x)$ .
2. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (x + y, x)$ .

##### Proposition 11

Soit  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ .

$f$  est surjective ssi  $f(E) = F$ .

*Preuve.*

□

**Définition 19**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application bijective, on appelle réciproque de  $f$  et on note  $f^{-1}$  l'application de  $F$  dans  $E$  qui à tout élément  $y \in F$  associe son unique antécédent par  $f$ . Par définition, on a :

$$\forall (x, y) \in E \times F, y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

⇨ **Exemple 13 :** Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x) \end{matrix}$ . Montrer que  $f$  est bijective et déterminer  $f^{-1}$ .

**Remarque :** La notation utilisée pour la bijection réciproque et la même que celle utilisée pour l'image réciproque. Ces notations sont bien compatibles. En effet, si  $f : E \rightarrow F$  une application bijective et si  $B \subset F$ ,

- en considérant l'image réciproque de  $B$  par  $f$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\},$$

- en considérant l'image directe de  $B$  par  $f^{-1} : F \rightarrow E$  :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E, \exists y \in B, x = f^{-1}(y)\} \\ &= \{x \in E, \exists y \in B, y = f(x)\} \\ &= \{x \in E, f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

**Proposition 12**

Si  $f : E \rightarrow F$  est bijective, alors  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est bijective et  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

*Preuve.*

□

**Proposition 13**

Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ .

- Si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.
- Si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.
- Si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective.

*Preuve.*

□

⇔ **Exemple 14 :** Soient  $f \in \mathcal{F}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{F}(F, G)$ . Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

## 3.2 Propriétés des bijections

### Proposition 14

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application bijective. Alors :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = Id_E.$$

### Théorème 1 (Caractérisation de la bijection réciproque)

Soit  $f : E \rightarrow F$ . On a l'équivalence :

$$f \text{ est bijective de } E \text{ dans } F \iff \exists g \in \mathcal{F}(F, E), \begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$$

Dans ce cas, l'application  $g$  est unique et  $g = f^{-1}$ .

*Preuve.*

□

**Proposition 15**

Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont bijectives, alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est une bijective et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

*Preuve.*

□

⇔ **Exemple 15 :** Soient  $f, g : E \rightarrow E$  telles que  $f \circ g \circ f = Id_E$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives et exprimer leurs réciproques.

**3.3 Cas des fonctions réelles****Proposition 16**

Soit  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , soit  $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ . Si  $f$  est strictement monotone, alors  $f$  est injective.

*Preuve.*

□

**Proposition 17**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ , soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- Si  $f$  est strictement croissante, alors  $f$  est bijective de  $[a, b]$  vers  $[f(a), f(b)]$ .
- Si  $f$  est strictement décroissante, alors  $f$  est bijective de  $[a, b]$  vers  $[f(b), f(a)]$ .

*Preuve.*

□

⇨ **Exemple 16:** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $x \mapsto xe^x$ .

Montrer que  $f$  est bijective.