Chapitre 10 : Ensembles et applications

I Ensembles

1.1 Appartenance, inclusion

Définition 1

L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Définition 2

Soit E et F deux ensembles.
On dit que F est **inclus** dans E et on note $F \subset E$ ssi tous les éléments de F appartiennent à E, c'est à dire :

$$\forall x \in F,\ x \in E.$$

Proposition 1

Soit E et F deux ensembles.
La négation de l'inclusion s'écrit $E \not\subset F$ et on a :

$$E \not\subset F \Leftrightarrow \exists x \in E, x \not\in F,$$

c'est-à-dire il existe un élément de E qui n'est pas dans F.

Proposition 2

Soient E, F deux ensembles. On a :

$$E = F \quad \text{si et seulement si} \quad E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

Méthode 1 (inclusion et égalité d'ensembles)

- Pour montrer que $F \subset E$, le modèle de rédaction est :
  Soit $x \in F$.
  Raisonnement
  Alors, $x \in E$.
  On a donc $F \subset E$.
- Montrer que $E = F$:
  Sauf dans les cas simples, où l'on peut montrer directement que $x \in E$ équivaut à $x \in F$ par équivalence, on raisonnera souvent par double inclusion pour montrer une égalité d'ensemble.

➪ **Exemple 1 :** Montrer que :

$$\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} =]-\infty, 0].$$

1.2 Sous-ensemble

Définition 3

Soit E un ensemble.
On dit que F est une partie de E ou que F est un sous-ensemble de E ssi $F \subset E$
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Remarque :

- Ecrire "soit $A \subset E$ est équivalent à écrire "soit $A \in \mathcal{P}(E)$".
- On a toujours $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$ donc : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

➪ **Exemple 2 :** Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{1, 2\}$ et $E = \emptyset$.

1.3 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 4

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.

1. L'**intersection** de A et B, noté $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B :

$$A \cap B = \{x \in E\ ,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

2. La **réunion** de A et B, noté $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B :

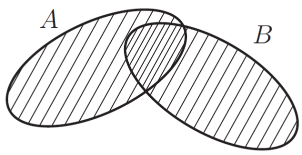
$$A \cup B = \{x \in E\ ,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

3. La différence de A et B, noté $A \setminus B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

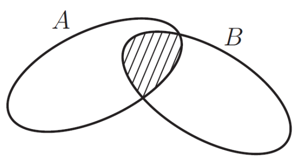
$$A \setminus B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in A, x \notin B\}$$

4. le **complémentaire** de A dans E, noté $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou A^c est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

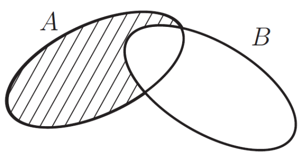
$$E \setminus A = \overline{A} = A^c = \{x \in E\ ,\ x \notin A\}$$



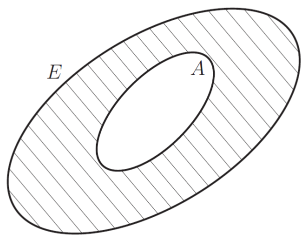
(a) Schéma de $A \cup B$



(b) Schéma de $A \cap B$



(c) Schéma de $A \setminus B$



(d) Schéma de $\overline{A}$

Définition 5

Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E.
A et B sont dits **disjoints** ssi :

$$A \cap B = \emptyset.$$

Proposition 3

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On a :

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \text{ et } A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Preuve.

□

Proposition 4 (Propriétés algébriques de l'intersection et l'union)

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. L'intersection et l'union sont **commutatives** :
$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$
2. L'intersection et l'union sont **associatives** :
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
On pourra omettre les parenthèses et noter $A \cap B \cap C$ l'ensemble des éléments communs aux trois sous-ensembles A, B et C et noter $A \cup B \cup C$ l'ensemble des éléments qui sont dans l'un au moins des trois sous-ensembles A, B ou C.
3. $A \cap E = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup E = E \qquad A \cup \emptyset = A.$
4. L'intersection et la réunion sont **distributives** l'une par rapport à l'autre :
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Preuve.

1. Montrons que : $A \cap B = B \cap A$. On a :
$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \in E, x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C)\} \\ &= \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \in C\} \\ &= \{x \in E, (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C\} \\ &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$
2. Montrons que : $A \cap B = B \cap A$. On a :
$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\} \\ &= \{x \in E, x \in B \text{ et } x \in A\} \\ &= B \cap A. \end{aligned}$$
3. Montrons que : $A \cup E = E$.
On a $E \subset A \cup E \subset E$. Donc $A \cup E = E$.
4. Montrons que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Soit $x \in E$, on a :
$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ et } B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$
Montrons que : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Soit $x \in E$, on a :
$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ ou } B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } C) \\ &\iff (x \in A \cup B) \text{ et } (x \in A \cup C) \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

□

➪ **Exemple 3 :** Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E. Montrer que :
$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Proposition 5 : Propriétés algébriques du complémentaire

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\overline{\emptyset} = E$, $\overline{E} = \emptyset$.
2. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
3. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
5. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Preuve. 3. Montrons $A = \overline{\overline{A}}$ par double inclusion.

- Soit $x \in \overline{\overline{A}}$ alors $x \notin \overline{A}$ donc $x \in A$.
- Soit $x \in A$ alors $x \notin \overline{A}$ donc $x \in \overline{\overline{A}}$.

Ainsi, $A = \overline{\overline{A}}$.

4. Montrons par double inclusion que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
   - Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
     On a non($x \in A \cup B$). Donc *non*($x \in A$ ou $x \in B$).
     Ainsi, non($x \in A$) et non($x \in B$).
     Donc $x \notin A$ et $x \notin B$.
     D'où $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. Donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
   - Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Alors $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$.
     Raisonnons par l'absurde et supposons que $x \in A \cup B$. Alors $x \in A$ ou $x \in B$.
     Si $x \in A$ alors $x \notin \overline{A}$ ce qui est absurde.
     Si $x \in B$ alors $x \notin \overline{B}$ ce qui est absurde.
     Ainsi, $x \notin A \cup B$ donc $x \in \overline{A \cup B}$.

   On obtient donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
5. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$.
   D'où $\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

□

➪ **Exemple 4 :** Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E.

1. Montrer que : $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
2. Exprimer $A \setminus (B \setminus C)$ en fonction de $A \setminus B$ et $A \cap C$.
3. On suppose que $A \setminus B = C$. Montrer que $A \cup B = B \cup C$.

Proposition 6

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

$$A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C,$$

$$A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C.$$

Preuve.

□

Proposition 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 5 :** Soit E un ensemble, soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ l'équation :

$$X \cup A = B.$$

1.4 Recouvrement disjoint, partition

Définition 6

Soient E un ensemble, soit I un ensemble, soient, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$. On définit :

- la réunion des $(A_i)_{i\in I}$ par :
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$$
- l'intersection des $(A_i)_{i\in I}$ par :
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$$

➪ **Exemple 6 :** Posons : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $A_i = \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right]$. Montrons que :

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} A_i = \{0\} \text{ et } \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i = [-1,1].$$

Définition 7

Soient E un ensemble, soit I un ensemble, soient, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$. On dit :

- les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints ssi :
$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$
- les $(A_i)_{i\in I}$ sont un recouvrement disjoint de E ssi les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints et $E = \bigcup_{i\in I} A_i$.
- les $(A_i)_{i\in I}$ sont une partition de E ssi les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, non vides et $E = \bigcup_{i\in I} A_i$.

1.5 Produit cartésien

Définition 8

- Soient E et F deux ensembles.

Etant donné $x \in E$ et $y \in F$, on construit le couple (x, y) de sorte que :

$$\forall x, x' \in E,\ \forall y, y' \in F, \quad (x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \big\{(x, y),\ x \in E \text{ et } y \in F\big\}$$

- Plus généralement, soient $E_1, ..., E_n$ des ensembles.

Etant donné $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$, on construit le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de sorte que :

$$\forall x_1, x_1' \in E_1, ..., \ \forall x_n, x_n' \in E_n, \quad (x_1, ..., x_n) = (x_1', ..., x_n') \iff \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = x_i'$$

On note $E_1 \times ... \times E_n$ l'ensemble des n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ où : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i$:

$$E_1 \times ... \times E_n = \big\{(x_1, ..., x_n),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\big\}$$

Si $E_1 = ... = E_n = E$, l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n$ est noté E^n.

Remarque : Les produits cartésiens se représentent par des rectangles.

➪ **Exemple 7 :** Soient E, F, G des ensembles. Montrer que :

$$(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G).$$

II Applications

Dans toute cette partie, E, F, G, H désignent des ensembles non vides.

2.1 Définition

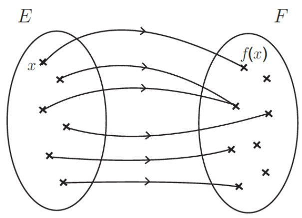
Définition 9

On appelle **application** f la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F et d'une correspondance qui à tout élément x de E associe un unique élément de F noté $f(x)$. On la note $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Si $x \in E$ et $y = f(x)$, on dit que :

- y est l'image de x par f
- x est un **antécédent** de y par f (pas forcément unique).

On appelle **graphe** de l'application f l'ensemble des couples $\{(x, f(x)), x \in E\}$.
On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.



2.2 Fonction indicatrice

Définition 10

Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** de A et on note $\mathbb{1}_A$ l'application

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition 8

Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensemble de E.

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

Preuve. □

Proposition 9

Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensemble de E.

$$A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

$$A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$$

Preuve. □

➪ **Exemple 8 :** Soient A et B des parties de E. Montrer, en utilisant les fonctions indicatrices, que :

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$$

2.3 Restriction, égalité, prolongement

Définition 11 : Egalité de deux applications

Deux applications f et g sont égales ssi elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée et si : $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Définition 12

Soit A une partie de E.

- Soit $f : E \to F$ une application. On appelle **restriction** de f à A et on note $f_{|A}$ l'application

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- On dit que f est un prolongement de g ssi g est une restriction de f.

Remarque : Il n'y a pas d'unicité du prolongement. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$. Les fonctions suivantes sont des prolongements de f à $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array},\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array},\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

2.4 Composition

Définition 13

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on appelle composée de f par g, notée $g \circ f$ l'application $g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \end{array}$

Définition 14

On appelle identité de E et on note Id_E l'application :

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Proposition 10

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. On a :

- $Id_F \circ f = f$ et $f \circ Id_E = f$.
- $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Cette application peut alors être notée $h \circ g \circ f$.

Remarque : En général, $g \circ f \neq f \circ g$, même lorsque ces composées ont un sens.

Preuve. □

2.5 Familles d'éléments d'un ensemble

Définition 15

Soient E un ensemble et I un ensemble. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application x de I dans E. L'image de $i \in I$ est noté x_i plutôt que $x(i)$ et on note $(x_i)_{i \in I}$ une telle famille.

Définition 16

Soient E un ensemble et I un ensemble.
L'ensemble I est appelé l'ensemble des indices de la famille $(x_i)_{i \in I}$.
La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite finie ssi I est fini.
On appelle sous-famille de la famille $(x_i)_{i \in I}$, toute famille $(x_i)_{i \in J}$ où $J \subset I$.

Remarque : L'ensemble d'indexation est quelconque, les éléments sont dans un ensemble quelconque. Par exemple :

- Posons : $\forall i \in \mathbb{Z}$, $x_i = i^2$. La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une famille de $\mathbb{N}$ indexée par $\mathbb{Z}$. La famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une sous-famille de la famille : $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$.
- Posons $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $A_i =]-i, i]$. La famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ indexée par $\mathbb{N}^*$.

2.6 Image directe, image réciproque

Définition 17

Soient $f : E \to F$.

- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}.$$

$$\forall y \in F, y \in f(A) \Longleftrightarrow \big(\exists x \in A, y = f(x)\big)$$

- Soit $B \in \mathcal{P}(F)$, on appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

$$\forall x \in E,\ x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

Remarque : L'image réciproque existe toujours, on peut donc écrire f^{-1} d'une partie. Par contre, la fonction f^{-1} n'existe que pour les applications bijectives, donc, en général, on ne peut pas écrire f^{-1} seule ou f^{-1} d'un élément.

➪ **Exemple 9 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

- Déterminer $f([-1,2])$.
- Déterminer $f^{-1}([-1,2])$.

➪ **Exemple 10 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+\frac{1}{z} \end{array}$. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

➪ **Exemple 11 :** Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, soient $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

III Injection, surjection, bijection

3.1 Généralités

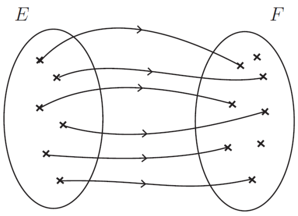
Définition 18

Soit $f : E \to F$, on dit que f est :

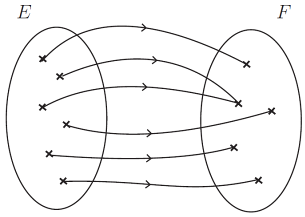
- **injective** (ou est une injection) si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E, c'est à dire lorsque :
$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$
- **surjective** (ou est une surjection) si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E, c'est à dire lorsque :
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$
- **bijective** (ou est une bijection) si f est injective et surjective c'est-à-dire si tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E, c'est à dire lorsque :
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$

➪ **Exemple 12 :** Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de :

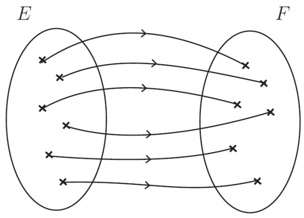
1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,2x) \end{array}$.
2. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x) \end{array}$.



(e) Application injective



(f) Application surjective



(g) Application bijective

Proposition 11

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
f est surjective ssi $f(E) = F$.

Preuve.

$\square$

Définition 19

Soit $f : E \to F$ une application bijective, on appelle réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F dans E qui à tout élément $y \in F$ associe son unique antécédent par f. Par définition, on a :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

➪ **Exemple 13 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x) \end{array}$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Remarque : La notation utilisée pour la bijection réciproque et la même que celle utilisée pour l'image réciproque. Ces notations sont bien compatibles. En effet, si $f : E \to F$ une application bijective et si $B \subset F$,

- en considérant l'image réciproque de B par f :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\},$$

- en considérant l'image directe de B par $f^{-1} : F \to E$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E, \exists y \in B, x = f^{-1}(y)\} \\ &= \{x \in E, \exists y \in B, y = f(x)\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in B\}. \end{aligned}$$

Proposition 12

Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Preuve.

$\square$

Proposition 13

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Preuve.

$\square$

➪ **Exemple 14 :** Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

3.2 Propriétés des bijections

Proposition 14

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors :

$$f \circ f^{-1} = Id_F \qquad \text{et} \qquad f^{-1} \circ f = Id_E.$$

Théorème 1 (Caractérisation de la bijection réciproque)

Soit $f : E \to F$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est bijective de } E \text{ dans } F \iff \exists g \in \mathcal{F}(F,E), \begin{cases} g \circ f = Id_E \\ f \circ g = Id_F \end{cases}$$

Dans ce cas, l'application g est unique et $g = f^{-1}$.

Preuve.

□

Proposition 15

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ est une bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 15 :** Soient $f, g : E \to E$ telles que $f \circ g \circ f = Id_E$. Montrer que f et g sont bijectives et exprimer leurs réciproques.

3.3 Cas des fonctions réelles

Proposition 16

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, soit $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Preuve.

□

Proposition 17

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si f est strictement croissante, alors f est bijective de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$.
- Si f est strictement décroissante, alors f est bijective de $[a, b]$ vers $[f(b), f(a)]$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 16 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$.

Montrer que f est bijective.