Chapitre 12 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

I Ensemble de matrices

1.1 Définitions

Définition 1

- On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$:
$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \cdots & m_{i,j} & \cdots & m_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$
où les $m_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. On écrit aussi $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et le nombre de colonnes, on pourra noter plus simplement $M = \left(m_{i,j}\right)$.
Les $m_{i,j}$ sont appelés coefficients de la matrice.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 2

Soit M une matrice à n lignes et p colonnes.

- Si $p = 1$, on dit que M est une matrice colonne.
- Si $n = 1$, on dit que M est une matrice ligne.
- Si $n = p$, on dit que M est une matrice carrée et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3

On note $0_{n,p}$ (ou 0 s'il n' y a pas d'ambiguïté) la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls et on note 0_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 4

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- soit $i \in [\![1,n]\!]$, la matrice ligne $(m_{i,j})_{j\in[\![1,p]\!]} = (m_{i,1} \ \dots \ m_{i,p}) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée la i-ème ligne de M.
- soit $j \in [\![1,p]\!]$, la matrice colonne $(m_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée la j-ème colonne de M.
- Si $p = n$, les éléments $m_{i,i}$, $i \in [\![1,n]\!]$ sont appelés les éléments diagonaux de M et $(m_{1,1},\dots,m_{n,n})$ est appelée la diagonale de M.

Remarque : Une matrice carrée n'a qu'une seule diagonale.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition 5 : Somme et multiplication par un scalaire

Soient $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On définit :

- la matrice somme $A+B=(s_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :
$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ s_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}.$$
- la matrice $\lambda.A=\lambda A=(r_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :
$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ r_{i,j}=\lambda a_{i,j}.$$
- On appelle combinaison linéaire de A et B toute matrice de la forme $\alpha A+\beta B$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.

➪ **Exemple 1 :** Soient $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$. Calculer $A-2B+3C$.

1.3 Matrices élémentaires

Définition 6

Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, le symbole de Kronecker noté $\delta_{i,j}$ est défini par : $\delta_{i,j}=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right.$.

Définition 7

Soient $(r,s)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on note la matrice $E_{r,s}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls sauf le terme (r,s) qui vaut 1, c'est-à-dire :
$$E_{r,s}=(\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.$$
Les matrices $E_{r,s}$ sont appelées matrices élémentaires.

Remarque : Dans la notation $E_{r,s}$, la taille de la matrice est sous-entendue.

Proposition 1

Soit $M=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :
$$M=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p}m_{r,s}E_{r,s}.$$
Ainsi, toute matrice s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Preuve.

□

1.4 Produit matriciel

Définition 8 : Produit de deux matrices

Soient $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On appelle produit des matrices A et B la matrice $A\times B=AB=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :
$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ m_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}.$$

Remarque : Si X est une matrice colonne, alors AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

➪ **Exemple 2 :** Soient $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Calculer AB.

➪ **Exemple 3 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^2 = aA + bI_3,$$

où : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➪ **Exemple 4 :** Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], a_{i,j} = j + 1,$$

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], b_{i,j} = i.$$

Calculer AB.

Proposition 2 : Propriétés du produit matriciel

1. Le produit matriciel est associatif :

$$\forall\ (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\ (AB)C = A(BC).$$

   Ainsi, le produit de trois matrices A, B et C pourra être noté ABC sans parenthèses.
2. Le produit matriciel est bilinéaire :

$$\forall\ (A, B, B') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ A(\lambda B + \mu B') = \lambda AB + \mu AB',$$

   et

$$\forall\ (A, A', B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B.$$

Remarque :

- Le produit matriciel n'est pas commutatif. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc : $AB \neq BA$.
- On ne peut pas simplifier le produit matriciel par des matrices non nulles, autrement dit, $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $AB = 0_2$ et $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$.
- On peut avoir une puissance nulle sans que la matrice soit nulle. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A^2 = 0_2$ et $A \neq 0_2$.

Preuve.

□

Définition 9

On appelle matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1, les autres valant 0 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, son coefficient d'indice (i, j) est $\delta_{i,j}$.
Les matrices de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées des matrices scalaires.

Proposition 3

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A.I_n = I_n.A = A.$$

Remarque : On a donc : $A.(\lambda I_n) = (\lambda I_n).A = \lambda A$ ainsi la multiplication par une matrice scalaire est équivalente à la multiplication par un scalaire.

Preuve.

□

Proposition 4

$$\forall r \in [\![1,n]\!],\ \forall s,k \in [\![1,p]\!],\ \forall l \in [\![1,q]\!],\ E_{r,s}E_{k,l} = \delta_{s,k}E_{r,l}.$$

Preuve.

□

1.5 Transposition

Définition 10

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposée de A et on note $A^T = (a'_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Autrement dit, A^T est obtenue à partir de A par échange des lignes et des colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & & & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad ; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 5 : Opérations et transposition

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ (A^T)^T = A.$
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K},\ (\lambda.A + \mu.B)^T = \lambda.A^T + \mu.B^T$. On dit que la transposition est linéaire.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ (AB)^T = B^T A^T.$

Preuve.

□

II Ensemble des matrices carrées

2.1 Puissances de matrices carrées

Définition 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit A^k par récurrence en posant :

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A^k \times A = A \times A^k \end{cases}$$

Remarque :

- Le produit de deux matrices carrées de taille n est une matrice carrée de taille n, le produit ne pose donc pas de problème de définition.
- En général, le produit matriciel n'est pas commutatif mais une matrice commute toujours avec ses puissances.
- En général : $(AB)^k \neq A^k B^k$, par exemple, posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

➪ **Exemple 5 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Calculer U^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Cas particulier : matrices diagonales et triangulaires

Définition 12

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, on dit qu'elle est diagonale ssi $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j \implies a_{i,j}=0$.
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on note $diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la matrice diagonale d'éléments diagonaux $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$:

$$diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Proposition 6

- Soient $A=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n), B=diag(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a :

$$\lambda.A+\mu.B=diag(\lambda\lambda_1+\mu\mu_1,\dots,\lambda\lambda_n+\mu\mu_n)\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

- Soient $A=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n), B=diag(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$AB=diag(\lambda_1\mu_1,\dots,\lambda_n\mu_n)\in\mathcal{D}_n$$

Preuve.

□

Proposition 7

$\forall A=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K}),\ \forall k\in\mathbb{N},\ A^k=diag(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)\in\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

Définition 13

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, on dit qu'elle est :

- triangulaire supérieure si : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ j<i \implies a_{i,j}=0$,
- triangulaire inférieure si : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i<j \implies a_{i,j}=0$,
- triangulaire ssi elle est triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.

On note respectivement $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque :

- Pour une matrice triangulaire supérieure, les termes situés sous la diagonale sont nuls mais les autres sont quelconques. Ainsi : $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}\in\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$.
- Les matrices diagonales sont les seules matrices triangulaires supérieures et inférieures.

Proposition 8

- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par combinaisons linéaires et produits c'est à dire :

$$\text{Pour } \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}):\ \forall(A,B)\in\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.A+\mu.B\in\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \text{ et } AB\in\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$$

$$\text{Pour } \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}):\ \forall(A,B)\in\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.A+\mu.B\in\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) \text{ et } AB\in\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$$

- Soit $A=(a_{i,j})\in T_n^+(\mathbb{K})$, $B=(b_{i,j})\in T_n^+(\mathbb{K})$, on a : $AB\in T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $AB\in T_n^-(\mathbb{K})$).
En posant $AB=(c_{i,j})$, on a :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ c_{i,i}=a_{i,i}b_{i,i}.$$

Remarque : La diagonale du produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est égale au produit des éléments diagonaux, il en est donc de même pour les puissances. Par exemple : $\begin{pmatrix}2&3\\0&-1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&*\\0&(-1)^n\end{pmatrix}$.

Preuve.

□

2.3 Formule du binôme de Newton et formule de factorisation

Proposition 9 : Formule du binôme de Newton

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commutent, c'est à dire que $AB = BA$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$$

Remarque :

- Il ne faut pas oublier de citer l'hypothèse de commutativité.
- Si A ou B est une matrice scalaire, l'hypothèse de commutativité est automatiquement vérifiée.
- Il n'est intéressant d'appliquer la formule du binôme de Newton que pour des matrices dont les puissances sont simples à calculer : matrices scalaires, matrices diagonales mais aussi matrices ayant rapidement une puissance nulle.

Preuve.

□

Définition 14

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que M est nilpotente ssi :

$$\exists k \in \mathbb{N},\ M^k = 0_n.$$

➪ **Exemple 6 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

➪ **Exemple 7 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 10 : Formule de factorisation

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B commutent. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k - B^k = (A-B) \sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-j-1}.$$

Preuve.

□

2.4 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition 15

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :

- symétrique si et seulement si $A^T = A$.
- antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Remarque : La notion de symétrie est par rapport à la diagonale : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Proposition 11

La diagonale d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.

Preuve.

□

Proposition 12

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaires. C'est à dire :

$$\text{Pour } \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) : \ \forall (A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \ \lambda.A + \mu.B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Pour } \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) : \ \forall (A,B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), \ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \ \lambda.A + \mu.B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

III Opérations élémentaires

3.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes.
On appelle **opération élémentaire** sur les lignes de A l'une des trois opérations suivantes :

- Échange des lignes L_r et L_s avec $r \neq s$ que l'on note $L_r \leftrightarrow L_s$.
- Multiplication d'une ligne L_r par $\lambda \in \mathbb{K}^*$ que l'on note $L_r \leftarrow \lambda L_r$.
- Ajout de $\lambda \times L_s$ à L_r avec $r \neq s$ que l'on note $L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 17

On appelle matrice de permutation toute matrice carrée $P_{r,s} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$P_{r,s} = I_n - E_{r,r} - E_{s,s} + E_{r,s} + E_{s,r} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & \overset{r^e\text{ colonne}}{\downarrow} & & & & \overset{s^e\text{ colonne}}{\downarrow} & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & . & . & . & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\ . & & & 0 & 1 & & & 0 & & & . \\ . & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & . \\ . & & & 0 & & & 1 & 0 & & & . \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & . & . & . & & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow r^e\text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow s^e\text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

où $(r,s) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $r \neq s$.

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(r,s) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $r \neq s$, $P_{r,s}A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_r \leftrightarrow L_s$.

Preuve.

□

Proposition 14

Soit $(r,s) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $r \neq s$, on a : $P_{r,s}^2 = I_n$.

Preuve.

□

Définition 18

On appelle matrice de dilatation toute matrice carrée $D_r(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$D_r(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{r,r} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & r^e \text{ colonne} & & \\ & & \downarrow & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow r^e \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $r \in [\![1, n]\!]$.

Proposition 15

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $r \in [\![1, n]\!]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $D_r(\lambda)A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_r \leftarrow \lambda L_r$.

Preuve.

□

Proposition 16

Soit $r \in [\![1, n]\!]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a : $D_r(\frac{1}{\lambda})D_r(\lambda) = D_r(\lambda)D_r(\frac{1}{\lambda}) = I_n$.

Preuve.

□

Définition 19

On appelle matrice de transvection toute matrice carrée $T_{r,s}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme suivante :

$$T_{r,s}(\lambda) = I_n + \lambda E_{r,s} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & s^e \text{ colonne} & \\ & & & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \longleftarrow r^e \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(r, s) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $r \neq s$.

Proposition 17

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(r, s) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $r \neq s$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{r,s}(\lambda)A$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $L_r \leftarrow L_r + \lambda L_s$.

Preuve.

□

Proposition 18

Soit $(r, s) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $r \neq s$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $T_{r,s}(\lambda)T_{r,s}(-\lambda) = T_{r,s}(-\lambda)T_{r,s}(\lambda) = I_n$.

Preuve.

□

Définition 20

Les matrices de permutation, dilatation et transvection sont appelées matrices d'opérations élémentaires.

3.2 Opérations élémentaires sur les colonnes

Définition 21

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes.
Tout comme pour les lignes, on appelle **opération élémentaire** sur les colonnes de A l'une des trois opérations suivantes :

- Échange des colonnes C_r et C_s avec $r \neq s$ ce que l'on note $C_r \leftrightarrow C_s$.
- Multiplication d'une colonne C_r par un scalaire λ non nul ce que l'on note $C_r \leftarrow \lambda C_r$.
- Ajout de $\lambda \times C_s$ à C_r avec $r \neq s$ ce que l'on note $C_r \leftarrow C_r + \lambda C_s$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 19

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $(r,s) \in [\![1,p]\!]^2$ avec $r \neq s$, $AP_{r,s}$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $C_r \leftrightarrow C_s$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et soit $r \in [\![1,p]\!]$, $AD_r(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $C_r \leftarrow \lambda C_r$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $(r,s) \in [\![1,p]\!]^2$ avec $r \neq s$, $AT_{r,s}(\lambda)$ est la matrice obtenue en appliquant à A l'opération $C_s \leftarrow C_s + \lambda C_r$.

IV Systèmes linéaires

4.1 Généralités

Définition 22

- On appelle **équation linéaire à p inconnues** une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$, d'inconnues $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ et où $a_1, \ldots, a_p, b \in \mathbb{K}$.
- On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** tout système de la forme :

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$$

  Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, les $x_j \in \mathbb{K}$ sont les **inconnues** du système, les $a_{i,j}$ sont les **coefficients** du système, et les b_i forment le **second membre** du système. On appelle **solution de** $(\mathcal{S})$ tout p-uplet $(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les n-équations de $(\mathcal{S})$.
- On appelle **système homogène** associé au système $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}_0)$ obtenu en remplaçant les seconds membres $b_1, \ldots, b_n$ par des 0 :

$$(\mathcal{S}_0)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{array}\right.$$

Définition 23

Soit $\mathcal{S}$ le système linéaire introduit dans la définition précédente.

- On appelle **matrice du système** ($\mathcal{S}$) la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

- On appelle **colonne du second membre de** ($\mathcal{S}$) la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Proposition 20 : Ecriture matricielle d'un système

Soit ($\mathcal{S}$) un système linéaire à n équations et p inconnues, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice du système ($\mathcal{S}$) et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne du second membre de (S).

Soit $(x_1, \dots x_p) \in \mathbb{K}^p$, posons : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Alors :

$$(x_1, \dots x_p) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \text{ ssi } AX = B.$$

Preuve.

□

4.2 Système compatible

Définition 24

Soit ($\mathcal{S}$) un système linéaire. On dit que :

- ($\mathcal{S}$) est compatible ssi ($\mathcal{S}$) admet au moins une solution.
- ($\mathcal{S}$) est incompatible ssi ($\mathcal{S}$) n'admet pas de solution.

Proposition 21

Soit ($\mathcal{S}$) un système linéaire à n équations et p inconnues, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice du système ($\mathcal{S}$) et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne du second membre de (S).
Le système ($\mathcal{S}$) est compatible ssi B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Preuve.

□

Proposition 22

Soit ($\mathcal{S}$) un système linéaire **compatible** à n équations et p inconnues, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice du système ($\mathcal{S}$) et soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la colonne du second membre de (S).
Notons S l'ensemble des solutions de $AX = B$ et S_0 l'ensemble des solutions de $AX = 0$.
Comme ($\mathcal{S}$) est compatible, il existe $X_P \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX_P = B$. On a alors :

$$S = \{X_P + X_0,\ X_0 \in S_0\}.$$

Remarque : On retrouve la même structure que celle de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire : une solution particulière sommée avec les solutions du système homogène. Cependant, contrairement aux équations différentielles, il faut supposer que la solution particulière existe.

Preuve.

□

4.3 Algorithme du pivot de Gauss

On rappelle l'algorithme du pivot de Gauss vu en début d'année. Cet algorithme s'applique à des systèmes de taille quelconque.

Le but de l'algorithme du pivot de Gauss est de faire des opérations élémentaires sur un système de façon à obtenir un système plus simple à résoudre. Les étapes sont les suivantes :

- on choisit une équation faisant apparaître la première inconnue,
- en effectuant un échange, on place cette équation sur la première ligne,
- on effectue des opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ afin d'éliminer la première inconnue dans toutes les autres équations,
- on répète ces opérations en ne considérant plus ni la première ligne, ni la première inconnue.

L'objectif est d'obtenir, sur les premières lignes, un début de forme triangulaire et, éventuellement, sur les dernières lignes, des termes nuls.

➪ **Exemple 8 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z-4t & = & 0 \\ y-z+t & = & -3 \\ x+3y-3t & = & 0 \\ -7y+3z+t & = & -3 \end{array}\right.$$

➪ **Exemple 9 :** Soit $m \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx+my+4z & = & 1 \\ 2x+y+mz & = & 1 \\ x+2y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

V Matrices inversibles

5.1 Généralités

Définition 25

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire (d'ordre n) et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition 23

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors la matrice B telle que $AB = BA = I_n$ est unique.
Cette unique matrice B est appelée inverse de A et notée A^{-1}.

Preuve.

□

Remarque :

- $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $I_n^{-1} = I_n$,
- $P_{r,s} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P_{r,s}^{-1} = P_{r,s}$,
- $D_r(\alpha) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D_r(\alpha)^{-1} = D_r(\frac{1}{\alpha})$,
- $T_{r,s}(\alpha) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T_{r,s}(\alpha)^{-1} = T_{r,s}(-\alpha)$.

Proposition 24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
• S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B = A^{-1}$.
• S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$, alors $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B = A^{-1}$.

Preuve.
Résultat admis à ce stade de l'année. □

➪ **Exemple 10 :** On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}.

5.2 Cas particuliers

Proposition 25

La matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$.

Dans ce cas, $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Preuve.

□

Proposition 26

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve.

□

5.3 Opérations sur les matrices inversibles

Proposition 27

Si $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve.

□

Proposition 28

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $\lambda A \in GL_n(\mathbb{K})$ et on a $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

Preuve.

□

Proposition 29

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Preuve.

□

Proposition 30

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, soit $k \in \mathbb{N}$, alors :

$$(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}.$$

Preuve. □

Proposition 31

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Remarque : L'inverse d'une matrice symétrique est symétrique et l'inverse d'une matrice antisymétrique est antisymétrique.

Preuve. □

5.4 Inversibilité et systèmes

Proposition 32

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Preuve. □

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ possède une unique solution.

Preuve. □

5.5 Méthodes pratiques de calcul de l'inverse

Méthode 1 : Résolution de système

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vecteur colonne de paramètres, on résout le système (S) associé à l'équation matricielle $AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si (S) admet une unique solution, A est inversible et l'unique solution de (S) est $X = A^{-1}B$. On détermine alors A^{-1}.

Méthode 2 : Opérations élémentaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On cherche des opérations élémentaires exclusivement sur les lignes ou exclusivement sur les colonnes telles que A se ramène à I_n.
On sait alors qu'il existe des matrices d'opérations élémentaires $E_1, \dots, E_r$ telles que $E_r \dots E_1 A = I_n$ (cas des lignes) ou $AE_r \dots E_1 = I_n$ (cas des colonnes).
D'où $A^{-1} = E_r \dots E_1 = E_r \dots E_1 I_n$.
L'algorithme de calcul de l'inverse de A consiste donc à appliquer conjointement à A et I_n les opérations élémentaires qui ramènent A à I_n. A la fin du calcul, on obtient les matrices I_n et A^{-1}.

➪ **Exemple 11 :** Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

➪ **Exemple 12 :** On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Inverser P, calculer $P^{-1}AP$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5.6 Cas particulier des matrices triangulaires

Proposition 33

Une matrice triangulaire T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, T^{-1} est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de T.

Remarque : On retrouve le résultat vu sur les matrices diagonales.

Preuve.

□