

Chapitre 13 : Limites et continuité

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

I Limite d'une fonction en un point

1.1 Généralités

Définition 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un réel, élément de I ou extrémité finie de I . On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en a , notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en a , notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en a , notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq M$$

Illustration :

Définition 2

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $+\infty$ est une extrémité de I . On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$, ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geq A \implies f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geq A \implies f(x) \leq M$$

Illustration :

Définition 3

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $-\infty$ est une extrémité de I . On dit que :

- f admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

- f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leq A \implies f(x) \geq M$$

- f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leq A \implies f(x) \leq M$$

Proposition 1 : Unicité de la limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_2$ avec $l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $l_1 = l_2$. La limite de f en a est alors notée :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ou } \lim_a f.$$

Preuve.

□

Proposition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f possède une limite en a , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Preuve.

□

1.2 Fonctions bornées

Définition 4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $r > 0$ tel que f vérifie P sur $I \cap]a - r, a + r[$.
- Si $a = +\infty$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie P sur $I \cap]A, +\infty[$.
- Si $a = -\infty$, on dit que f vérifie la propriété P au voisinage de a ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie P sur $I \cap]-\infty, A[$.

Proposition 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Remarque : La fonction n'est bornée que sur un voisinage de a . Dans le cas des suites, une suite convergente est également bornée à partir d'un certain rang mais comme les termes restants sont en nombre fini, on peut conclure que la suite est bornée. Mais, ce raisonnement ne s'applique pas aux fonctions.

Preuve.

□

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 5

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité finie de I .

- Si a n'est pas l'extrémité inférieure de I . On dit que f admet une limite à gauche en a ssi $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ admet une limite en a . Cette limite est alors notée : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x < a} f(x)$.
- Si a n'est pas l'extrémité supérieure de I . On dit que f admet une limite à droite en a ssi $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ admet une limite en a . Cette limite est alors notée : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x > a} f(x)$.

Remarque :

- $l = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, -\eta \leq x - a < 0 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- $l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, 0 < x - a \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- La valeur a est exclue donc, la valeur des limites à gauche et à droite n'est pas nécessairement $f(a)$.

⇔ **Exemple 1 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$
- Soit $n \in \mathbb{Z}$
 $\lim_{x \rightarrow n^+} \lfloor x \rfloor$ et $\lim_{x \rightarrow n^-} \lfloor x \rfloor$

Proposition 4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un élément de I qui ne soit pas une extrémité de I . Soit $l \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \\ l = f(a) \end{cases}$$

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 1 : Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

La fonction f admet pour limite l en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I qui tend vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l .

Preuve.

□

Remarque : Ce résultat est utile pour prouver la non existence de limites.

⇔ **Exemple 2 :**

- Montrer que \cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Montrer que $\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

1.5 Opérations sur les limites

Les preuves de ces résultats sont analogues à celles vues pour les suites.

Proposition 5

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda l$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ll'$.
- Si $l \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.
- Si $l' \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.

Proposition 6

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et g est bornée alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = 0$.

Proposition 7

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et si g est majorée au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée par une constante strictement positive au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si g est majorée par une constante strictement négative au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}^{-*} \cup \{-\infty\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et si g est minorée par une constante strictement positive au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et si g est majorée par une constante strictement négative au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}^{-*} \cup \{-\infty\}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = +\infty$.

Proposition 8

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soit b un élément ou une extrémité de J (éventuellement $\pm\infty$). Soit $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Preuve.

□

⇒ **Exemple 3 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{2x+7} - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} |\ln(x)|^{1/\ln(x)}$

1.6 Limites et inégalités

Proposition 9

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
Si f et g admettent une limite finie en a et si $f \leq g$ au voisinage de a . Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Proposition 10

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si f admet une limite l en a alors :

- Pour tout $M > l$, f est majorée par M au voisinage de a .
- Pour tout $m < l$, f est minorée par m au voisinage de a .

1.7 Existence de limites et inégalités

Théorème 2 : Théorème d'encadrement

Soient f, g et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Si :

- $f \leq g \leq h$ au voisinage de a
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$

alors, g admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

Théorème 3 : Théorème de majoration/minoration

Soient f et g deux fonctions de I dans \mathbb{R} , a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

1. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

1.8 Théorème de la limite monotone

Définition 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si $f(I)$ admet un maximum, on l'appelle le maximum de f et on note :

$$\max_{x \in I} f(x) = \max_I f = \max f(I).$$

- Si $f(I)$ admet un minimum, on l'appelle le minimum de f et on note :

$$\min_{x \in I} f(x) = \min_I f = \min f(I).$$

- Si f est majorée alors $f(I)$ est majorée donc $\sup f(I)$ existe, on l'appelle la borne supérieure de f et on note :

$$\sup_{x \in I} f(x) = \sup_I f = \sup f(I).$$

- Si f est minorée alors $f(I)$ est minorée donc $\inf f(I)$ existe, on l'appelle la borne inférieure de f et on note :

$$\inf_{x \in I} f(x) = \inf_I f = \inf f(I).$$

Théorème 4 : Théorème de la limite monotone

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est croissante, on a :
 - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.
 - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.
- Si f est décroissante, on a :
 - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$.
 - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$.

Preuve.

□

⇒ **Exemple 4 :** Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On suppose que : $\lim_{\infty} f = l \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f(x) < l.$$

Proposition 11

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est croissante non majorée, alors $\lim_b f = +\infty$.
- Si f est croissante non minorée, alors $\lim_a f = -\infty$.
- Si f est décroissante non majorée, alors $\lim_a f = +\infty$.
- Si f est décroissante non minorée, alors $\lim_b f = -\infty$.

Preuve.

□

Corollaire 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a \in I$ tel que a ne soit pas une extrémité de I . Alors, f admet des limites finies à gauche et à droite en a et on a :

- Si f est croissante :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

- Si f est décroissante :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Preuve.

□

II Continuité en un point

2.1 Généralités

Définition 7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit que f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a .

⇔ **Exemple 5 :** Montrer que $|\cdot|$ est continue en tout point de \mathbb{R} .

Définition 8

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si et seulement si il existe une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g|_{I \setminus \{a\}} = f$ et g continue en a .

Proposition 12

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

f est prolongeable par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie l en a .

Dans ce cas un tel prolongement est unique et est défini par :

$$g : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix}$$

g est appelé le prolongement par continuité de f en a .

Remarque : En général, on confond f et son prolongement par continuité ce qui revient à poser $f(a) = \lim_a f$.

Preuve.

□

⇒ **Exemple 6 :** Montrer que :

- $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
- $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
- $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2.2 Continuité à gauche, à droite

Définition 9

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I qui n'est pas une extrémité. On dit que :

- f est continue à gauche en a si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a),$$

- f est continue à droite en a si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Proposition 13

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un élément de I distinct de ses extrémités. On a l'équivalence :

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

⇒ **Exemple 7 :** Etudier la continuité de $x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$.

Remarque : L'existence de limites finies en a^+ et en a^- ne suffit pas, elles doivent être égales à $f(a)$.

⇒ **Exemple 8 :** Etudier la continuité de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto [-x^2]$ en 0.

⇒ **Exemple 9 :** Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

2.3 Opérations

Proposition 14

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues en a .

Si de plus, g ne s'annule pas en a , alors le fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a .

Proposition 15

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue en a .

2.4 Image d'une suite**Proposition 16**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in I$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Remarque : Ce résultat peut être utilisé avec le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Preuve.

□

⇔ **Exemple 10 :** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

⇔ **Exemple 11 :** Déterminer toutes les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Plan d'étude :

- On raisonne par analyse-synthèse.
- On calcule $f(0)$.
- On raisonne par récurrence pour calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- On trouve un lien entre $f(-x)$ et $f(x)$ pour en déduire $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
- On utilise les résultats précédents pour calculer $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$.
- Comme tout réel est limite d'une suite de rationnels, un argument de continuité permet de calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- On fait la synthèse.

Proposition 17

Soient $f : I \rightarrow I$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente,
- sa limite l appartient à I ,
- la fonction f est continue en l ,

alors, l est un point fixe de f , c'est-à-dire :

$$f(l) = l.$$

Preuve.

□

Remarque : L'hypothèse de continuité est fondamentale. Par exemple, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$. f n'est pas continue en 0.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\lim u_n = 0$ et $f(0) \neq 0$.

III Continuité sur un intervalle

3.1 Intervalles

Définition 10 : Intervalles de \mathbb{R}

On appelle intervalle de \mathbb{R} toute partie de \mathbb{R} ayant l'une des formes suivantes :

$$[a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b], [a, +\infty[,]a, +\infty[,]-\infty, b],]-\infty, b[, \{a\}, \mathbb{R}, \emptyset$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Proposition 18

Soit X une partie de \mathbb{R} . Alors :

X est un intervalle si et seulement si : pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Preuve.

□

3.2 Généralités

Définition 11

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I .
On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{R} . On dit qu'une fonction continue sur I est de classe \mathcal{C}^0 sur I .

Proposition 19

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0(I)$,
- $f g \in \mathcal{C}^0(I)$,
- si, de plus, g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I)$.

Proposition 20

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$ avec $f(I) \subset J$. Alors :

$$g \circ f \in \mathcal{C}^0(I).$$

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a, b], f(c) = y.$$

Remarque :

- c n'est pas unique en général
- Le résultat est faux en général si I n'est pas un intervalle.

Preuve.

⇔ **Exemple 12 :** Soient f et g des fonctions continues qui ne s'annulent pas sur I et telles que $|f| = |g|$. Alors $f = g$ ou $f = -g$.

⇔ **Exemple 13 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

⇔ **Exemple 14 :** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (avec n facteurs).

On suppose que f^n admet un point fixe. Montrer que f admet un point fixe.

Proposition 21 : Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a et en b .

Soit $y \in]\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$ ou $]\lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[, f(c) = y.$$

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a .

Soit $y \in]\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$ ou $[f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$, alors :

$$\exists c \in]a, b], f(c) = y.$$

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en b .

Soit $y \in]\lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a)]$ ou $[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$, alors :

$$\exists c \in [a, b[, f(c) = y.$$

Corollaire 2

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Corollaire 3

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Preuve.

□

3.4 Fonctions continues sur un segment

Théorème 6 : Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Autrement dit, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors il existe $c, d \in [a, b]$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], f(c) \leq f(x) \leq f(d),$$

⇔ **Exemple 15 :** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.

⇔ **Exemple 16 :** Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ telles que : $\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)$. Montrer que :

$$\exists m > 0, \forall x \in [0, 1], f(x) + m \leq g(x).$$

Corollaire 4

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Preuve.

□

3.5 Bijectivité

Proposition 22

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\rightarrow f(I) \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Alors \tilde{f} est bijective.

Remarque :

- On confond souvent f et \tilde{f} .
- La réciproque est fausse : $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est bijective et non strictement monotone.

Preuve.

□

Proposition 23

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone. Alors \tilde{f}^{-1} est strictement monotone de même sens que f .

Lemme 1

Si f est monotone sur un intervalle I et si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I .

Preuve. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f croissante.

Soit a un élément de I distinct de ses extrémités.

Montrons que f est continue en a .

Comme f est croissante, on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas continue. Alors, une de ces inégalités est stricte.

Supposons par exemple : $f(a) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Soit $y \in]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$.

- Comme a n'est pas l'extrémité supérieure de I , il existe $u \in I \cap]a, +\infty[$.

On a alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq f(u)$.

En effet : $\forall z \in]a, u], f(z) \leq f(u)$.

En faisant tendre z vers a , on obtient le résultat.

On a alors : $y \in]f(a), f(u)]$ avec $f(a), f(u) \in f(I)$. Donc $y \in f(I)$ car $f(I)$ est un intervalle.

Donc $y \in f(I) \cap]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$. D'où $]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[\subset f(I) \cap]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$.

- Soit $t \in I$.
 - Si $t \leq a$ alors $f(t) \leq f(a)$ car f est croissante.
 - Si $t > a$, alors $f(t) \geq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

En effet, on a : $\forall z \in]a, t], f(z) \leq f(t)$.

En passant à la limite lorsque z tend vers a , on obtient le résultat souhaité.

D'où, $f(I) \cap]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[= \emptyset$.

On obtient une contradiction car $]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[\neq \emptyset$ et $]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[\subset f(I) \cap]f(a), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$.

Donc $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. De même on prouve que l'on a : $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

f est donc continue en a .

Si a est une extrémité de I on procède de même en ne conservant qu'une des deux inégalités.

Ainsi, f est continue sur I . □

Théorème 7

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

Sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f .

Preuve.

On a déjà prouvé que f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f . Il reste donc à prouver que f^{-1} est continue.

f^{-1} est monotone sur l'intervalle $f(I)$. De plus, $f^{-1}(f(I)) = I$ qui est un intervalle. Donc d'après le lemme, f^{-1} est continue sur $f(I)$. □

IV Fonctions à valeurs complexes

4.1 Définitions

Définition 12

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{C}$ en a ssi :

$$\text{Cas } a \in \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Cas } a = +\infty : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Cas } a = -\infty : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

- On dit que f est continue en $a \in I$ ssi f admet $f(a)$ comme limite en a .
On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .
On note $C^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{C} .

Proposition 24

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).
 f admet une limite (finie) en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ admettent des limites finies en a , et on a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(f(x)) + i \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(f(x)).$$

Corollaire 5

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{C}$.
 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \overline{f(x)} = \overline{l}$.

Corollaire 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On a l'équivalence :
 f est continue sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues sur I .

4.2 Fonctions bornées**Définition 13**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |f(x)| \leq M.$$

Proposition 25

Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ admettant une limite finie en a (un élément de I ou une extrémité de I , éventuellement $\pm\infty$) est bornée au voisinage de a .

4.3 Opérations**Proposition 26**

Soit a un élément ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{C}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \in \mathbb{C}$. Alors :

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda l + \mu l'$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ll'$.
- Si $l' \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.

Proposition 27

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a .
- fg est continue en a .
- Si de plus, g ne s'annule pas en a , alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a .

Proposition 28

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
- $fg \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
- Si de plus, g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.