# Chapitre 13 : Limites et continuité

Dans tout le chapitre $I$ désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

## I Limite d'une fonction en un point

### 1.1 Généralités

**Définition 1**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un réel, élément de $I$ ou extrémité finie de $I$. On dit que :

- $f$ admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $a$, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

- $f$ admet pour limite $+\infty$ en $a$, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- $f$ admet pour limite $-\infty$ en $a$, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq M$$

**Définition 2**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $+\infty$ est une extrémité de $I$. On dit que :

- $f$ admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

- $f$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- $f$ admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \Longrightarrow f(x) \leq M$$

**Définition 3**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $-\infty$ est une extrémité de $I$. On dit que :

- $f$ admet une limite (finie) $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq A \Longrightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

- $f$ admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq A \Longrightarrow f(x) \geq M$$

- $f$ admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq A \Longrightarrow f(x) \leq M$$

**Proposition 1 : Unicité de la limite**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$). Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_1$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_2$ avec $l_1$ , $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $l_1 = l_2$. La limite de $f$ en $a$ est alors notée :

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ ou } \lim_a f.$$

*Preuve.* $\square$

**Proposition 2**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si $f$ possède une limite en $a$, alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

*Preuve.* $\square$

## 1.2 Fonctions bornées

**Définition 4**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a$ un élément de $I$ ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que $f$ vérifie la propriété $P$ au voisinage de $a$ ssi il existe $r > 0$ tel que $f$ vérifie $P$ sur $I \cap ]a-r, a+r[$.
- Si $a = +\infty$, on dit que $f$ vérifie la propriété $P$ au voisinage de $a$ ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f$ vérifie $P$ sur $I \cap ]A, +\infty[$.
- Si $a = -\infty$, on dit que $f$ vérifie la propriété $P$ au voisinage de $a$ ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f$ vérifie $P$ sur $I \cap ]-\infty, A[$.

**Proposition 3**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un point ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$). Si $f$ admet une limite finie en $a$, alors $f$ est bornée au voisinage de $a$.

**Remarque :** La fonction n'est bornée que sur un voisinage de $a$. Dans le cas des suites, une suite convergente est également bornée à partir d'un certain rang mais comme les termes restants sont en nombre fini, on peut conclure que la suite est bornée. Mais, ce raisonnement ne s'applique pas aux fonctions.

*Preuve.* $\square$

## 1.3 Limite à droite, limite à gauche

**Définition 5**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un élément ou une extrémité finie de $I$.

- Si $a$ n'est pas l'extrémité inférieure de $I$. On dit que $f$ admet une limite à gauche en $a$ ssi $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en $a$. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.
- Si $a$ n'est pas l'extrémité supérieure de $I$. On dit que $f$ admet une limite à droite en $a$ ssi $f|_{I\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en $a$. Cette limite est alors notée : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

**Remarque :**

- $l = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, -\eta \leq x - a < 0 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- $l = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, 0 < x - a \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$
- La valeur $a$ est exclue donc, la valeur des limites à gauche et à droite n'est pas nécessairement $f(a)$.

➪ **Exemple 1 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
- Soit $n \in \mathbb{Z}$
  $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor$ et $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor$

**Proposition 4**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un élément de $I$ qui ne soit pas une extrémité de $I$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \\ l = f(a) \end{cases}$$

## 1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

**Théorème 1 : Caractérisation séquentielle de la limite**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
La fonction $f$ admet pour limite $l$ en $a$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $I$ qui tend vers $a$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l$.

*Preuve.*

□

**Remarque :** Ce résultat est utile pour prouver la non existence de limites.

➪ **Exemple 2 :**

- Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.
- Montrer que $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

## 1.5 Opérations sur les limites

Les preuves de ces résultats sont analogues à celles vues pour les suites.

**Proposition 5**

Soit $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l + l'$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda l$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = ll'$.
- Si $l \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.
- Si $l' \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.

**Proposition 6**

Soit $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $g$ est bornée alors $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = 0$.

**Proposition 7**

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$).

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $g$ est minorée au voisinage de $a$ alors $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ alors $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $g$ est majorée au voisinage de $a$ alors $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ alors $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $g$ est minorée par une constante strictement positive au voisinage de $a$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{+*}\cup\{+\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $g$ est majorée par une constante strictement négative au voisinage de $a$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{-*}\cup\{-\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $g$ est minorée par une constante strictement positive au voisinage de $a$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{+*}\cup\{+\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = -\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $g$ est majorée par une constante strictement négative au voisinage de $a$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $\lim_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^{-*}\cup\{-\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = +\infty$.

**Proposition 8**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soit $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$). Soit $b$ un élément ou une extrémité de $J$ (éventuellement $\pm\infty$). Soit $c \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = c$, alors $g\circ f$ admet une limite en $a$ et $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

*Preuve.*

□

➪ **Exemple 3 :** Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 1}{x^2}$
- $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$
- $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln(x+\sqrt{x^2-1}))$
- $\lim_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$
- $\lim_{x\to 0} |\ln(x)|^{1/\ln(x)}$

## 1.6 Limites et inégalités

**Proposition 9**

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un point ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$).
Si $f$ et $g$ admettent une limite finie en $a$ et si $f \le g$ au voisinage de $a$. Alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

**Proposition 10**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un point ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Si $f$ admet une limite $l$ en $a$ alors :

- Pour tout $M > l$, $f$ est majorée par $M$ au voisinage de $a$.
- Pour tout $m < l$, $f$ est minorée par $m$ au voisinage de $a$.

## 1.7 Existence de limites et inégalités

**Théorème 2 : Théorème d'encadrement**

Soient $f$, $g$ et $h : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$). Si :

- $f \leq g \leq h$ au voisinage de a
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$

alors, $g$ admet une limite en $a$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

**Théorème 3 : Théorème de majoration/minoration**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$, $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$).

1. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

## 1.8 Théorème de la limite monotone

**Définition 6**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
• Si $f(I)$ admet un maximum, on l'appelle le maximum de $f$ et on note :

$$\max_{x\in I} f(x) = \max_I f = \max f(I).$$

• Si $f(I)$ admet un minimum, on l'appelle le minimum de $f$ et on note :

$$\min_{x\in I} f(x) = \min_I f = \min f(I).$$

• Si $f$ est majorée alors $f(I)$ est majorée donc $\sup f(I)$ existe, on l'appelle la borne supérieure de $f$ et on note :

$$\sup_{x\in I} f(x) = \sup_I f = \sup f(I).$$

• Si $f$ est minorée alors $f(I)$ est minorée donc $\inf f(I)$ existe, on l'appelle la borne inférieure de $f$ et on note :

$$\inf_{x\in I} f(x) = \inf_I f = \inf f(I).$$

**Théorème 4 : Théorème de la limite monotone**

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ .

- Si $f$ est croissante, on a :
  - Si $f$ est majorée, alors $f$ admet une limite finie en $b$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.
  - Si $f$ est minorée, alors $f$ admet une limite finie en $a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
- Si $f$ est décroissante, on a :
  - Si $f$ est minorée, alors $f$ admet une limite finie en $b$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  - Si $f$ est majorée, alors $f$ admet une limite finie en $a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$

*Preuve.*

□

➪ **Exemple 4 :** Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On suppose que : $\lim\limits_{\infty} f = l \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) < l.$$

**Proposition 11**

Soient $a, b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ et $f : ]a,b[\to\mathbb{R}$ .

- Si $f$ est croissante non majorée, alors $\lim\limits_{b} f = +\infty$.
- Si $f$ est croissante non minorée, alors $\lim\limits_{a} f = -\infty$.
- Si $f$ est décroissante non majorée, alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
- Si $f$ est décroissante non minorée, alors $\lim\limits_{b} f = -\infty$.

*Preuve.*

□

**Corollaire 1**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a \in I$ tel que $a$ ne soit pas une extrémité de $I$. Alors, $f$ admet des limites finies à gauche et à droite en $a$ et on a :

- Si $f$ est croissante :
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a^+} f(x)$$
- Si $f$ est décroissante :
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \le f(a) \le \lim_{x\to a^-} f(x)$$

*Preuve.*

□

# II Continuité en un point

## 2.1 Généralités

**Définition 7**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que $f$ est continue en $a$ si et seulement si :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \le \eta \implies |f(x)-f(a)| \le \varepsilon.$$

Dans le cas contraire, on dit que $f$ est discontinue en $a$.

➪ **Exemple 5 :** Montrer que $|.|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

**Définition 8**

Soit $a \in I$ et $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est prolongeable par continuité en $a$ si et seulement si il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{I\backslash\{a\}} = f$ et $g$ continue en $a$.

**Proposition 12**

Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
$f$ est prolongeable par continuité en $a$ si et seulement si $f$ admet une limite finie $l$ en $a$.
Dans ce cas un tel prolongement est unique et est défini par :

$$g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

$g$ est appelé le prolongement par continuité de $f$ en $a$.

**Remarque :** En général, on confond $f$ et son prolongement par continuité ce qui revient à poser $f(a) = \lim_a f$.

*Preuve.*

□

➪ **Exemple 6 :** Montrer que :

- $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
- $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
- $f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

## 2.2 Continuité à gauche, à droite

**Définition 9**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a$ un élément de $I$ qui n'est pas une extrémité. On dit que :

- $f$ est continue à gauche en $a$ si et seulement si :
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a),$$
- $f$ est continue à droite en $a$ si et seulement si :
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

**Proposition 13**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a$ un élément de $I$ distinct de ses extrémités. On a l'équivalence :

$f$ est continue en $a$ si et seulement si $f$ est continue à droite et à gauche en $a$.

➪ **Exemple 7 :** Etudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

**Remarque :** L'existence de limites finies en $a^+$ et en $a^-$ ne suffit pas, elles doivent être égales à $f(a)$.

➪ **Exemple 8 :** Etudier la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ en 0.

➪ **Exemple 9 :** Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que $f$ est continue.

## 2.3 Opérations

**Proposition 14**

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $fg$ sont continues en $a$.
Si de plus, $g$ ne s'annule pas en $a$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en $a$.

**Proposition 15**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si $f$ est continue en $a$ et si $g$ est continue en $f(a)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue en $a$.

### 2.4 Image d'une suite

**Proposition 16**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $a \in I$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $I$ convergeant vers $a$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

**Remarque :** Ce résultat peut être utilisé avec le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

*Preuve.*

□

➪ **Exemple 10 :** Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

➪ **Exemple 11 :** Déterminer toutes les fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Plan d'étude :

- On raisonne par analyse-synthèse.
- On calcule $f(0)$.
- On raisonne par récurrence pour calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- On trouve un lien entre $f(-x)$ et $f(x)$ pour en déduire $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
- On utilise les résultats précédents pour calculer $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$.
- Comme tout réel est limite d'une suite de rationnels, un argument de continuité permet de calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- On fait la synthèse.

**Proposition 17**

Soient $f : I \to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
- sa limite l appartient à $I$,
- la fonction $f$ est continue en $l$,

alors, $l$ est un point fixe de $f$, c'est-à-dire :

$$f(l) = l.$$

*Preuve.*

□

**Remarque :** L'hypothèse de continuité est fondamentale. Par exemple, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ si $x \neq 0$, 1 si $x = 0$.
$f$ n'est pas continue en 0.
Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors $(u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\lim u_n = 0$ et $f(0) \neq 0$.

# III Continuité sur un intervalle

### 3.1 Intervalles

**Définition 10 : Intervalles de $\mathbb{R}$**

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

$$[a,b], ]a,b[, [a,b[, ]a,b], [a,+\infty[, ]a,+\infty[, ]-\infty,b], ]-\infty,b[, \{a\}, \mathbb{R}, \emptyset$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

**Proposition 18**

Soit $X$ une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

$$X \text{ est un intervalle si et seulement si : pour tous } a, b \in X \text{ tels que } a \leq b\,,\ [a,b] \subset X.$$

*Preuve.*

□

### 3.2 Généralités

**Définition 11**

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur $I$ si et seulement si elle est continue en tout point de $I$.
On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction continue sur $I$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $I$.

**Proposition 19**

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0(I)$,
- $fg \in \mathcal{C}^0(I)$,
- si, de plus, $g$ ne s'annule pas sur $I$, $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I)$.

**Proposition 20**

Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$ avec $f(I) \subset J$. Alors :

$$g \circ f \in \mathcal{C}^0(I).$$

### 3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 5 : Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = y.$$

**Remarque :**

- $c$ n'est pas unique en général
- Le résultat est faux en général si $I$ n'est pas un intervalle.

*Preuve.*

□

➪ **Exemple 12 :** Soient $f$ et $g$ des fonctions continues qui ne s'annulent pas sur $I$ et telles que $|f| = |g|$. Alors $f = g$ ou $f = -g$.

➪ **Exemple 13 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

➪ **Exemple 14 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$ (avec $n$ facteurs).
On suppose que $f^n$ admet un point fixe. Montrer que $f$ admet un point fixe.

**Proposition 21 : Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires**

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en $a$ et en $b$.
  Soit $y \in ] \lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$ ou $] \lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$ , alors :
  $$\exists c \in ]a, b[,\ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en $a$.
  Soit $y \in ] \lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)]$ ou $[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in ]a, b],\ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en $b$.
  Soit $y \in ] \lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)]$ ou $[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in [a, b[,\ f(c) = y.$$

**Corollaire 2**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

**Corollaire 3**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

*Preuve.*

□

## 3.4 Fonctions continues sur un segment

**Théorème 6 : Théorème des bornes atteintes**

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors il existe $c, d \in [a, b]$ tel que :
$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d),$$

➪ **Exemple 15 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que $f$ est bornée.

➪ **Exemple 16 :** Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ telles que : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) < g(x)$. Montrer que :
$$\exists m > 0,\ \forall x \in [0, 1],\ f(x) + m \leq g(x).$$

**Corollaire 4**

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

*Preuve.*

□

## 3.5 Bijectivité

**Proposition 22**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Posons :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Alors $\tilde{f}$ est bijective.

**Remarque :**

- On confond souvent $f$ et $\tilde{f}$.
- La réciproque est fausse : $f : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in ]0,1[ \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est bijective et non strictement monotone.

*Preuve.* □

**Proposition 23**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone. Alors $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même sens que $f$.

**Lemme 1**

Si $f$ est monotone sur un intervalle $I$ et si $f(I)$ est un intervalle alors $f$ est continue sur $I$.

*Preuve.* Quitte à changer $f$ en $-f$, on peut supposer $f$ croissante.
Soit $a$ un élément de $I$ distinct de ses extrémités.
Montrons que $f$ est continue en $a$.
Comme $f$ est croissante, on sait que :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $f$ n'est pas continue. Alors, une de ces inégalités est stricte.
Supposons par exemple : $f(a) < \lim_{x \to a^+} f(x)$.
Soit $y \in ]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[$.

- Comme $a$ n'est pas l'extrémité supérieure de $I$, il existe $u \in I \cap ]a, +\infty[$.
  On a alors : $\lim_{x \to a^+} f(x) \leq f(u)$.
  En effet : $\forall z \in ]a, u]$, $f(z) \leq f(u)$.
  En faisant tendre $z$ vers $a$, on obtient le résultat.
  On a alors : $y \in [f(a), f(u)]$ avec $f(a), f(u) \in f(I)$. Donc $y \in f(I)$ car $f(I)$ est un intervalle.
  Donc $y \in f(I) \cap ]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[$. D'où $]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[ \subset f(I) \cap ]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[$.
- Soit $t \in I$.
  - Si $t \leq a$ alors $f(t) \leq f(a)$ car $f$ est croissante.
  - Si $t > a$, alors $f(t) \geq \lim_{x \to a^+} f(x)$.
    En effet, on a : $\forall z \in ]a, t]$, $f(z) \leq f(t)$.
    En passant à la limite lorsque $z$ tend vers $a$, on obtient le résultat souhaité.

  D'où , $f(I) \cap ]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[ = \emptyset$.

On obtient une contradiction car $]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[ \neq \emptyset$ et $]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[ \subset f(I) \cap ]f(a), \lim_{x \to a^+} f(x)[$.
Donc $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$. De même on prouve que l'on a : $f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.
$f$ est donc continue en $a$.
Si $a$ est une extrémité de $I$ on procède de même en ne conservant qu'une des deux inégalités.
Ainsi, $f$ est continue sur $I$. □

**Théorème 7**

Toute fonction $f$ continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle $f(I)$.
Sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que $f$.

*Preuve.*
On a déjà prouvé que $f^{-1}$ est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que $f$. Il reste donc à prouver que $f^{-1}$ est continue.
$f^{-1}$ est monotone sur l'intervalle $f(I)$. De plus, $f^{-1}(f(I)) = I$ qui est un intervalle. Donc d'après le lemme, $f^{-1}$ est continue sur $f(I)$. □

# IV Fonctions à valeurs complexes

## 4.1 Définitions

**Définition 12**

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$).

- On dit que $f$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ en $a$ ssi :

$$\begin{array}{ll} \text{Cas } a \in \mathbb{R} : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon. \\ \text{Cas } a = +\infty : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon. \\ \text{Cas } a = -\infty : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon \end{array}$$

- On dit que $f$ est continue en $a \in I$ ssi $f$ admet $f(a)$ comme limite en $a$.
  On dit que $f$ est continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.
  On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{C}$.

**Proposition 24**

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$).
$f$ admet une limite (finie) en $a$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites finies en $a$, et on a alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x\to a} \mathrm{Im}(f(x)).$$

**Corollaire 5**

Soient $f : I \to \mathbb{C}$, $a$ un élément de $I$ ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$) et $l \in \mathbb{C}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} \overline{f(x)} = \overline{l}$.

**Corollaire 6**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On a l'équivalence :
$f$ est continue sur $I$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.

## 4.2 Fonctions bornées

**Définition 13**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M.$$

**Proposition 25**

Toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ admettant une limite finie en $a$ (un élément de $I$ ou une extrémité de $I$, éventuellement $\pm\infty$) est bornée au voisinage de $a$.

## 4.3 Opérations

**Proposition 26**

Soit $a$ un élément ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$). Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ telles que $\lim\limits_{x\to a} f(a) = l \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{C}$. Alors :

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda l + \mu l'$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) g(x) = l l'$.
- Si $l' \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.

**Proposition 27**

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en $a$.
- $fg$ est continue en $a$.
- Si de plus, $g$ ne s'annule pas en $a$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en $a$.

**Proposition 28**

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
- $fg \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.
- Si de plus, $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.