

# Chapitre 14 : Dérivabilité

Dans tout le chapitre  $I$  désignera un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

## I Nombre dérivé, fonction dérivée

### 1.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé

#### Définition 1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soient  $x, a \in I$  avec  $x \neq a$ . Le taux d'accroissement entre  $x$  et  $a$  est le rapport :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**Remarque :** Le taux d'accroissement est la pente de la sécante entre les points d'abscisses  $x$  et  $a$ .

#### Définition 2

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si son taux d'accroissement en  $a$  :

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en  $a$ . Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelé nombre dérivée de  $f$  en  $a$ . Il est noté  $f'(a)$  :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Remarque :**

- Le nombre dérivée est la pente de la tangente au point d'abscisse  $a$ .
- L'équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Par composition des limites, on a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Ainsi :

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h),$$

avec :  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ .

Il s'agit du développement limité de  $f$  à l'ordre 1 en  $a$ .

⇒ **Exemple 1 :** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}$ , soit  $f : x \mapsto x^n$ . Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $a$ .

#### Proposition 1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

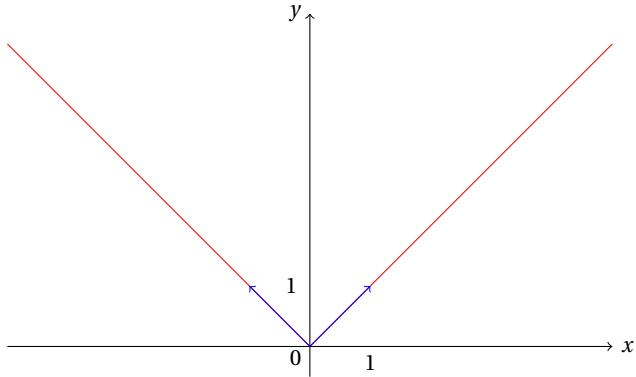
Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

Preuve.

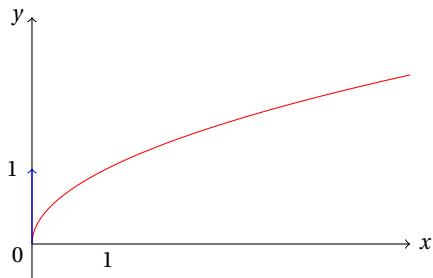
□

**Remarque :** La réciproque est fausse :

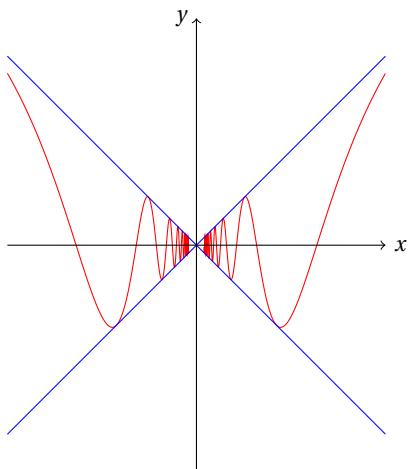
- $f : x \mapsto |x|$ ,



- $f : x \mapsto \sqrt{x}$ ,



- $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ ,



⇒ **Exemple 2:** Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$   $f$  est-elle dérivable en 0?

## 1.2 Dérivabilité à gauche, à droite

### Définition 3

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ .

On dit que  $f$  est dérivable à droite (resp. à gauche) en  $a$  si  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en  $a$ . Cette limite, si elle existe, est alors notée  $f'_d(a)$  (resp.  $f'_g(a)$ ) et est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de la fonction  $f$  en  $a$  :

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Proposition 2**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$  qui n'est pas une extrémité. On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ce cas, on a :  $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$ .

⇒ **Exemple 3 :** Posons :  $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$  Etudions la dérivabilité de  $f$  en 0.

**1.3 Fonction dérivée****Définition 4**

- On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable sur  $I$ ssi  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ . On définit alors la fonction dérivée de  $f$  notée  $f'$ , par :  $f' : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ .
- On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable à droite (resp. à gauche) sur  $I$ ssi  $f$  est dérivable à droite (resp. à gauche) en tout point de  $I$ . On définit alors la fonction dérivée à droite (resp. à gauche) de  $f$  notée  $f'_d$  (resp.  $f'_g$ ), par :  $f'_d$  (resp.  $f'_g$ ) :  $\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'_d(x) \text{ (resp. } f'_g(x)) \end{array}$ .

**Proposition 3**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable sur  $I$ , elle est continue sur  $I$ .

**1.4 Opérations sur les dérivées****Proposition 4**

Soit  $f$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables en  $a \in I$  :

- Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda f + \mu g)$  est dérivable en  $a$  et on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

- $fg$  est dérivable en  $a$  et on a :

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Si de plus,  $g(a) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $a$  et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Preuve.

□

⇒ **Exemple 4 :** Soit  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$ . Etudier la dérivabilité de  $f$  et calculer sa dérivée.

**Proposition 5**

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(I) \subset J$ . Soit  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a \in I$  et si  $g$  est dérivable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Preuve.

□

### Théorème 1

Soient  $a \in I$ ,  $f : I \rightarrow J$  continue, bijective et dérivable en  $a$ .

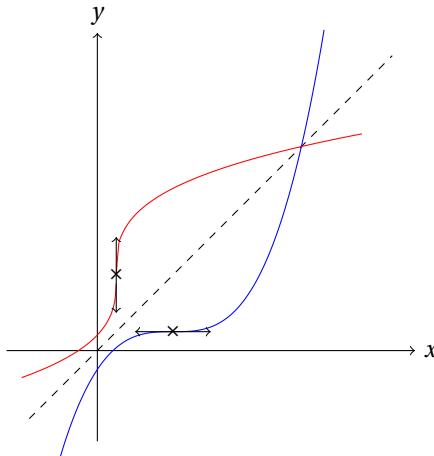
$f^{-1} : J \rightarrow I$  est dérivable en  $b = f(a)$  si, et seulement si  $f'(a) \neq 0$

et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Preuve. □

**Remarque :** L'annulation de la dérivée de  $f$  correspond à l'existence d'une tangente horizontale. Pour  $f^{-1}$ , cette tangente devient verticale, c'est pourquoi il y a un problème de non dérivarilité.



## II Propriétés des fonctions dérivables

### 2.1 Extremum local et point critique

#### Définition 5

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ .

- On dit que  $f$  admet une maximum local en  $a$ , si et seulement si il existe un réel  $r > 0$  tel que la fonction  $f|_{I \cap [a-r, a+r]}$  admette un maximum en  $a$ , i.e :

$$\forall x \in I \cap [a-r, a+r], f(x) \leq f(a)$$

- On dit que  $f$  admet une minimum local en  $a$ , si et seulement si il existe un réel  $r > 0$  tel que la fonction  $f|_{I \cap [a-r, a+r]}$  admette un minimum en  $a$ , i.e :

$$\forall x \in I \cap [a-r, a+r], f(x) \geq f(a)$$

- On dit que  $f$  admet un extremum local en  $a$ , si et seulement si  $f$  admet un maximum local en  $a$  ou un minimum local en  $a$ .

#### Définition 6

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a \in I$ .

On dit que  $a$  est un point critique de  $f$  ssi  $f$  est dérivable en  $a$  et :

$$f'(a) = 0.$$

## Théorème 2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Si :

- $a \in I$  et  $a$  n'est pas une extrémité de  $I$ ,
- la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ ,
- la fonction  $f$  admet un extremum local en  $a$ ,

alors  $a$  est un point critique de  $f$  c'est-à-dire :  $f'(a) = 0$ .

**Remarque :**

- Le résultat est faux si  $a$  est une extrémité de  $I$ . Par exemple :  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$  et  $a = 1$ .
- la réciproque est fausse. Par exemple :  $x \mapsto x^3$  et  $a = 0$ .

*Preuve.*

□

⇒ **Exemple 5 :** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose que  $f'(a) < 0$  et  $f'(b) > 0$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

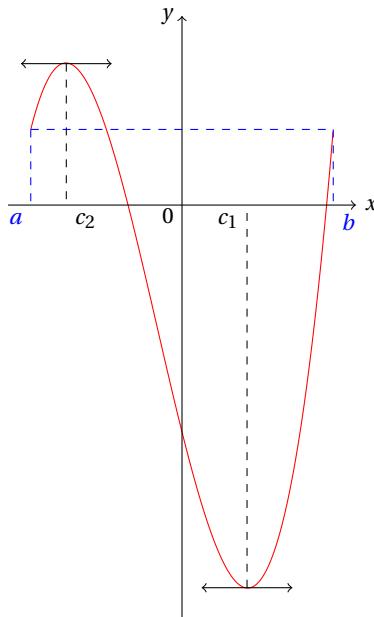
Ce résultat est le théorème de Darboux.

## 2.2 Théorème de Rolle

### Théorème 3 : Théorème de Rolle

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  telle que  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Remarque :** Le théorème de Rolle est un théorème d'existence mais pas d'unicité.



*Preuve.*

□

⇒ **Exemple 6 :** Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$ . On pose :

$$\begin{aligned} g : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^4 + x + f(x). \end{aligned}$$

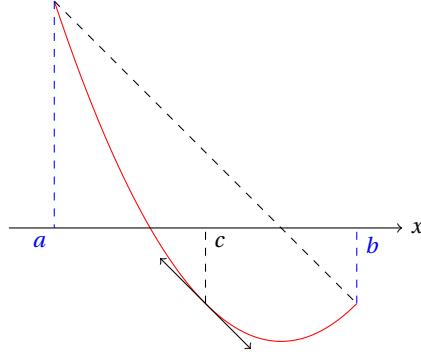
Montrer qu'il existe  $c \in ]-1, 1[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

## 2.3 Accroissement finis

### Théorème 4 : Égalité des accroissements finis

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ . Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Preuve.

□

⇒ **Exemple 7 :** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exists c \in \mathbb{R}^{+*}, f(2x) = 2x f'(c).$$

**Proposition 6 : Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f$  dérivable sur  $I$ . Supposons qu'il existe  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in I$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors :

$$\forall x, y \in I, x > y, m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y).$$

**Remarque :** Si  $f$  est  $C^1$  sur  $[a, b]$ , alors comme  $f'$  est continue sur un segment,  $f'$  est bornée. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Preuve.

□

**Définition 7**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $K \geq 0$ . On dit que  $f$  est  $K$ -lipschitzienne ssi :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

**Corollaire 1 : Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f$  dérivable sur  $I$ . Supposons qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , alors  $f$  est  $M$ -lipschitzienne :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Preuve.

□

⇒ **Exemple 8 :** Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leq |x - y|.$$

⇒ **Exemple 9 :** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

**Méthode 1**

Soit  $f : I \rightarrow I$  dérivable sur  $I$ . Supposons qu'il existe  $k \in [0, 1[$  tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

Supposons que  $l \in I$  soit un point fixe de  $f$ , c'est-à-dire que  $f(l) = l$ .

On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors, en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre  $u_n$  et  $l$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|.$$

Ainsi, par récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

Comme  $|k| < 1$ , on a  $\lim k^n = 0$  donc :

$$\lim u_n = l.$$

### Remarque :

- Cette méthode permet d'étudier la convergence sans étudier la monotonie.
- L'hypothèse  $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$  avec  $k < 1$  n'est pas équivalente à  $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$ .
- $u_n$  est une valeur approchée de  $l$  à  $k^n \cdot (b-a)$  si  $I = [a, b]$ .
- $(u_n)$  tend vers  $l$  à la même vitesse que la suite géométrique  $(k^n)$ .

⇒ **Exemple 10 :** On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{-u_n}$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{e}, 1\right].$$

Montrer que  $(u_n)$  converge. On note  $l$  sa limite. Comment obtenir une valeur approchée de  $l$  à  $10^{-3}$  près ?

## 2.4 Fonctions monotones

### Proposition 7

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

- $f$  est constante sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) = 0$ .
- $f$  est croissante sur  $[a, b]$  si et seulement  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) \geq 0$ .
- $f$  est décroissante sur  $[a, b]$  si et seulement  $\forall x \in ]a, b[, f'(x) \leq 0$ .

**Remarque :** L'hypothèse d'intervalle est fondamentale, par exemple  $x \mapsto \frac{1}{x}$  a une dérivée négative sur  $\mathbb{R}^*$  mais n'est pas décroissante sur  $\mathbb{R}^*$  et  $x \mapsto \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}$  a une dérivée nulle sur  $\mathbb{R}^*$  mais n'est pas constante sur  $\mathbb{R}^*$ .

Preuve. □

### Théorème 5

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

Supposons  $f$  monotone sur  $[a, b]$ .

Alors  $f$  est strictement monotone sur  $[a, b]$  ssi  $\{x \in ]a, b[, f'(x) = 0\}$  ne contient pas d'intervalle de la forme  $]\alpha, \beta[$  avec  $\alpha < \beta, \alpha, \beta \in ]a, b[$ .

Preuve. □

### Corollaire 2

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $f'$  est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de  $]a, b[$  où  $f'$  s'annule, alors  $f$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

**Remarque :** Le signe de la dérivée en un point ne donne pas d'information sur la monotonie au voisinage de ce point. Par

exemple, considérons la fonction définie par : 
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
  
$$x \mapsto \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ , comme  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 + 2x \sin \frac{1}{x}$ ,  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1 > 0$ .

De plus, soit  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$  donc  $f'(x)$  est la somme d'une quantité qui tend vers 1 et d'une quantité qui oscille entre -2 et 2 au voisinage de 0 donc qui change de signe au voisinage de 0.

## 2.5 Théorème de la limite de la dérivée

### Théorème 6 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit  $a \in I$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $f$  dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$  avec  $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Preuve. □

**Corollaire 3**

Soit  $a \in I$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $f$  dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$  avec  $l \in \mathbb{R}$  alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = l$ .

**Remarque :**

- La réciproque est fausse :  $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ ,  $f$  est dérivable en 0 et  $f'$  n'a pas de limite en 0.
- Le corollaire implique que  $f'$  est continue en  $a$ .

☞ **Exemple 11 :** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$        $x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$

☞ **Exemple 12 :** Résoudre l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  :

$$xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3.$$

### III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

#### 3.1 Définition

**Définition 8**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- On pose  $f^{(0)} = f$ .
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que la fonction  $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  existe et qu'elle est dérivable sur  $I$ . On note alors  $f^{(k+1)}$  la dérivée de  $f^{(k)}$ , c'est à dire :  $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ .

Si pour  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f^{(n)}$  existe, on dit alors que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$ , et on appelle  $f^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$  sur  $I$ .

On dit que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $n$ -fois dérivable sur  $I$ .

**Définition 9**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  si  $f$  est  $n$ -fois dérivable sur  $I$ , et  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .  
On note  $\mathcal{C}^n(I)$  ou  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$ .
- On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .  
On note  $\mathcal{C}^\infty(I)$  ou  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

#### 3.2 Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^k$

**Proposition 8**

Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$ , soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
Alors  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I)$  et  $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$ .

**Proposition 9 : Formule de Leibniz**

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ . Alors  $fg \in \mathcal{C}^n(I)$  et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Preuve.

□

☞ **Exemple 13 :** Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ ième de :

$$f : x \mapsto e^{2x}(x+2).$$

### Proposition 10

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $I$  et  $J$  deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient  $f \in \mathcal{C}^k(I)$  et  $g \in \mathcal{C}^k(J)$  telles que  $f(I) \subset J$ . Alors  $(g \circ f) \in \mathcal{C}^k(I)$ .

*Preuve.* • Pour  $k = 0$ , soient  $f \in \mathcal{C}^0(I)$  et  $g \in \mathcal{C}^0(J)$  telles que  $f(I) \subset J$ . Alors, par continuité de la composée d'applications continues, on a :  $(g \circ f) \in \mathcal{C}^0(I)$ .

- Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons le résultat vrai pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Soient  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$  et  $g \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$  telles que  $f(I) \subset J$ .

Alors  $f$  et  $g$  sont dérивables, donc  $g \circ f$  est dérivable et  $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$ .

Or  $g' \in \mathcal{C}^k(J)$  et  $f \in \mathcal{C}^k(I)$  donc, par hypothèse de récurrence :  $(g' \circ f) \in \mathcal{C}^k(I)$ .

De plus,  $f' \in \mathcal{C}^k(I)$ , donc par produit :

$$(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f \in \mathcal{C}^k(I).$$

Ainsi :  $(g \circ f) \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$ .

- D'où la preuve par récurrence.

□

### Proposition 11

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soient  $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$ . Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(I)$ .

*Preuve.* • Posons  $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , on a :  $h \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^*)$ . De plus,  $g \in \mathcal{C}^k(I)$  et, comme  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $g(I) \subset \mathbb{R}^*$ , donc, d'après la proposition précédente :

$$h \circ g = \frac{1}{g} \in \mathcal{C}^k(I).$$

- $f \in \mathcal{C}^k(I)$  et  $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}^k(I)$  donc, par produit :

$$\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(I).$$

□

⇒ **Exemple 14 :** Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n^{\text{ème}}$  de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

### Proposition 12

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f : I \rightarrow J$  une bijection de classe  $\mathcal{C}^k$ . Alors  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  si et seulement si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ .

**Remarque :** Il n'y a pas besoin d'hypothèse de non annulation de  $f'', f''', \dots$

*Preuve.* • Pour  $k = 1$ , soit  $f : I \rightarrow J$  est bijective, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

On sait que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  si et seulement si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ . De plus, dans ce cas :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Or  $f'$  est continue et ne s'annule pas sur  $I$ , et  $f^{-1}$  continue (car dérivable), donc  $(f^{-1})'$  est continue comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi  $f^{-1}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ .

- Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , supposons le résultat vrai pour les fonctions  $\mathcal{C}^k$ .

Soit  $f : I \rightarrow J$  est bijective, de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I$ .

Alors  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  si et seulement si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ . De plus, dans ce cas :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Or  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$ , et  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$ , donc  $(f^{-1})'$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$  comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi  $f^{-1}$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $J$ .

- D'où la preuve par récurrence.

□

## IV Fonctions convexes

### 4.1 Généralités

#### Définition 10

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est convexe ssi :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

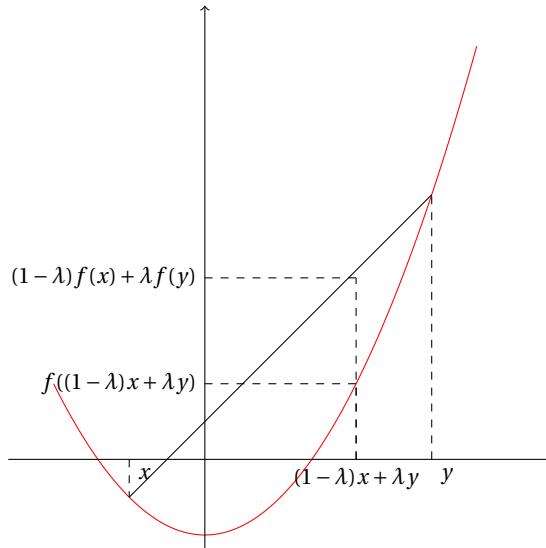
**Remarque :** Si  $x < y$ , on a :  $\{(1 - \lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0, 1]\} = [x, y]$  (paramétrage d'un segment).

En effet :

- soit  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $(1 - \lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x) \in [x, x + (y - x)] = [x, y]$ ,
- soit  $z \in [x, y]$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$z = (1 - \lambda)x + \lambda y \Leftrightarrow \lambda = \frac{z - x}{y - x}.$$

Posons  $\lambda = \frac{z - x}{y - x}$ . On a  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$  et comme  $z \in [x, y]$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  donc  $\lambda$  convient.



⇒ **Exemple 15 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$ . Montrer que  $f$  est convexe.

#### Proposition 13

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe.

Pour tout  $a \in I$  la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .

Preuve.

□

#### Proposition 14

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

Pour tous  $x, y \in I$ , la courbe représentative de  $f$  sur  $[x, y]$  est en-dessous de sa sécante sur  $[x, y]$ , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in I, x < y, \forall t \in [x, y], f(t) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}(t - x) + f(x).$$

Pour tous  $x, y \in I$ , la courbe représentative de  $f$  en dehors de  $[x, y]$  est au-dessus de sa sécante en dehors de  $[x, y]$ , c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in I, x < y, \forall t \notin [x, y], f(t) \geq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}(t - x) + f(x).$$

Preuve.

□

⇒ **Exemple 16 :** Toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue.

## 4.2 Convexité et fonctions dérivables

### Proposition 15

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est convexe,
- (ii)  $f'$  est croissante sur  $I$ ,
- (iii) la courbe représentative de  $f$  est située au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x, a \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

**Remarque :** Une fonction convexe n'est pas toujours dérivable. Par exemple :  $f : x \mapsto |x|$  est convexe mais non dérivable en 0.

Preuve. □

### Corollaire 4

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable.

$f$  est convexe ssi  $f'' \geq 0$  sur  $I$ .

#### ⇒ Exemple 17 :

1. Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto -\ln x$ .  $f$  est convexe.
2. Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$

#### ⇒ Exemple 18 :

1. La fonction  $-\sin$  est convexe sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
2. Montrer que :  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ .

## V Fonctions complexes

### 5.1 Généralités

#### Définition 11

- On dit que  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable en  $a \in I$  ssi son taux d'accroissement en  $a$  :

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite (finie) quand  $x$  tend vers  $a$ . On appelle alors dérivée de  $f$  en  $a$  et on note  $f'(a)$  cette limite.

- On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  ssi  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .

### Proposition 16

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  et  $a \in I$ .  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont dériviales en  $a$ , et on a alors :

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i\operatorname{Im}(f)'(a).$$

**Remarque :**

- Les résultats d'opérations sur les dérivées, dont la formule de Leibnitz, restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.
- Les résultats sur la monotonie et sur les extrema n'ont plus de sens pour les fonctions à valeurs complexes.

### 5.2 Inégalité des accroissements finis

#### Proposition 17 : Inégalité des accroissements finis

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable sur  $I$ . Supposons qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , alors :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

**Remarque :** Le théorème de Rolle est faux pour les fonctions à valeurs complexes, par exemple :  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto e^{ix}$ . Il en est de même pour l'égalité des accroissements finis. Cependant, l'inégalité des accroissements finis est vraie.

*Preuve.*

□