Chapitre 15 : Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

1.1 Définition

Définition 1

- On appelle **polynôme** P à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout objet de la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

  où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$.
- On dit que $a_0, ..., a_n$ sont les coefficients de P et que X est l'indéterminée.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : X est un objet formel qui ne nécessite pas d'être défini avec des quantificateurs. Il ne peut pas prendre de valeurs, donc on ne peut pas poser $X = a$.

Remarque : La vérité sur les polynômes : un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite de $\mathbb{K}$ à support fini, c'est-à-dire une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ telle que :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq N \Longrightarrow a_k = 0.$$

- On appelle polynôme nul et on note 0 le polynôme défini par la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0.$$

- On appelle polynôme constant égal à 1 et on note 1 le polynôme défini par la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = 0.$$

- On appelle indéterminée et on note X le polynôme défini par la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ a_k = 0,$$

  c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \delta_{k,1}.$$

- On peut montrer, en utilisant les définitions des opérations qui suivent que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme X^n (défini par récurrence) est la suite $(\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$.
- On a alors, si P est la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq N \Longrightarrow a_k = 0$, avec $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{N} a_n (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \text{ où 1 est le terme n} \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \end{aligned}$$

  On a donc retrouvé l'écriture classique des polynômes.

Définition 2

On dit que deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients :

$$P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$$

Remarque :

- Si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ avec $m \leq n$, on peut écrire : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ en posant : $\forall k > m,\ a_k = 0$. La borne haute de la somme peut donc être augmentée si nécessaire. C'est pourquoi, on peut supposer que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ sans perdre de généralité.
- On a, en particulier : un polynôme est nul ssi ses coefficients sont nuls.

1.2 Opérations algébriques dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 3

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit :

- la combinaison linéaire : $\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$
  où on pose $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > m$.
- le produit : $P.Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où : $\forall k \in [\![0, n+m]\!],\ c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.

Remarque : La formule du produit correspond bien à la formule "naturelle". Par exemple, pour $P = X^2 - 1$ et $Q = X + 3$. On a :

$$PQ = (X^2-1)(X+3) = X^3 + 3X^2 - X - 3.$$

Ceci est cohérent avec la formule de la définition car, ici, on a : $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\forall k > 2$, $a_k = 0$, $b_0 = 3$, $b_1 = 1$ et $\forall k > 1$, $b_k = 0$. Ainsi :

- $c_0 = a_0.b_0 = -3$,
- $c_1 = a_0.b_1 + a_1.b_0 = -1 + 0 = -1$,
- $c_2 = a_0.b_2 + a_1.b_1 + a_2.b_0 = 0 + 0 + 3 = 3$,
- $c_3 = a_0.b_3 + a_1.b_2 + a_2.b_1 + a_3.b_0 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$.

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. La fonction :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{P}: & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{array}$$

est appelée fonction polynomiale associée au polynôme P.

Proposition 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \mu \widetilde{Q} \text{ et } \widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}.$$

Preuve. Posons : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ et posons $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > m$.

- Soit $x \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda P + \mu Q}(x) &= \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k = \lambda \sum_{k=0}^{\max(n,m)} a_k x^k + \mu \sum_{k=0}^{\max(n,m)} b_k x^k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mu \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \lambda \widetilde{P}(x) + \mu \widetilde{Q}(x). \end{aligned}$$

  Donc :

$$\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \mu \widetilde{Q}.$$

- Soit $x \in \mathbb{K}$,

$$(\widetilde{P}\widetilde{Q})(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right).\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j x^{k+j} \underset{l=k+j}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{k+m} a_k b_{l-k} x^l.$$

  Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \le k \le n \\ k \le l \le k+m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max(0, l-m) \le k \le \min(n,l) \\ 0 \le l \le n+m \end{array} \right.$$

  Donc :

$$(\widetilde{P}\widetilde{Q})(x) = \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{k=\max(0,l-m)}^{\min(n,l)} a_k b_{l-k} x^l = \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} x^l,$$

car si $k < l - m$, alors $l - k > m$ donc $b_{l-k} = 0$ et si $k > n$ alors $a_k = 0$. Ainsi :

$$(\widetilde{P}\widetilde{Q})(x) = \sum_{l=0}^{n+m} c_l x^l = (\widetilde{PQ})(x).$$

Donc :

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}.$$

□

Proposition 2

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}[X]$
- $P.Q \in \mathbb{K}[X]$

Proposition 3

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ (Associativité de l'addition).
- $P+Q = Q+P$ (Commutativité de l'addition).
- $(P.Q).R = P.(Q.R)$ (Associativité de la multiplication).
- $P.Q = Q.P$ (Commutativité la multiplication).
- $P.(Q+R) = (P.Q)+(P.R)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).
- $P+0 = 0+P = P$.
- $P.1 = 1.P = P$.
- $\lambda(P.Q) = (\lambda P).Q = P.(\lambda Q)$.

Preuve. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- $(P+Q)+R = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k + \sum_{k=0}^{n} c_k X^k = \sum_{k=0}^{n}((a_k+b_k)+c_k)X^k = \sum_{k=0}^{n}(a_k+(b_k+c_k))X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n}(b_k+c_k X^k) = P+(Q+R)$
- $P+Q = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k = \sum_{k=0}^{n}(b_k+a_k)X^k = Q+P$
- On pose $P.Q = \sum_{k=0}^{2n} d_k X^k$, $Q.R = \sum_{k=0}^{2n} e_k X^k$, $(P.Q).R = \sum_{k=0}^{3n} g_k X^k$ et $P.(Q.R) = \sum_{k=0}^{3n} h_k X^k$.

  Soit $k \in [\![0, 3n]\!]$, on a alors : $g_k = \sum_{l=0}^{k} d_l c_{k-l} = \sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} c_{k-l}$

  De même, on a : $h_k = \sum_{m=0}^{k} a_m e_{k-m} = \sum_{m=0}^{k}\sum_{p=0}^{k-m} a_m b_p c_{k-m-p} = \sum_{m=0}^{k}\sum_{l=m}^{k} a_m b_{l-m} c_{k-l}$ en posant $l = m+p$

  Or,

$$\begin{cases} 0 \le m \le k \\ m \le l \le k \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le m \le l \\ 0 \le l \le k \end{cases}$$

  Ainsi : $h_k = \sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} c_{k-l} = g_k$

  Donc , on a :

$$\forall k \in [\![0, 3n]\!],\ h_k = g_k$$

  donc :

$$(P.Q).R = P.(Q.R)$$

- On pose $QP = \sum_{k=0}^{2n} d'_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

  Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a :

$$d_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{m=0}^{k} a_{k-m} b_m = d'_k \quad \text{en posant } m = k-l$$

  donc

$$P.Q = Q.P$$

- On pose $Q+R = \sum_{k=0}^{n} s_k X^k$, $P.R = \sum_{k=0}^{n} t_k X^k$, $P.(Q+R) = \sum_{k=0}^{2n} u_k X^k$ et $P.Q + P.R = \sum_{k=0}^{2n} v_k X^k$.

  Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a : $u_k = \sum_{l=0}^{k} a_l s_{k-l} = \sum_{l=0}^{k} a_l(b_{k-l}+c_{k-l}) = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} + \sum_{l=0}^{k} a_l c_{k-l} = d_k + t_k = v_k$ Donc :

$$P.(Q+R) = (P.Q)+(P.R)$$

- $P+0=0+P=\sum_{k=0}^{n}(a_k+0)X^k=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k=P$
- $P.1=1.P=\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{l=0}^{k}a_l\delta_{k-l,0}\right)X^k=\sum_{k=0}^{2n}a_kX^k=P.$
- $\lambda(P.Q)=(\lambda 1).(P.Q)=(\lambda 1.P).Q=(\lambda P).Q.$

□

Définition 5

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, on définit les puissances de P par :

$$P^0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ P^{n+1}=P.P^n.$$

Proposition 4 : Formule du binôme de Newton

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a

$$(P+Q)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^kQ^{n-k}.$$

Proposition 5 : Formule de factorisation

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$P^n-Q^n=(P-Q)\sum_{k=0}^{n-1}P^kQ^{n-1-k}.$$

Remarque : Les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ sont analogues à celles de $\mathbb{K}$, c'est pourquoi les résultats vus sur les nombres restent vrais sur les polynômes. Les formules du binôme de Newton et de factorisation se prouvent donc de la même façon que celles vues dans $\mathbb{K}$.

➪ **Exemple 1 :** Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (X^3+X^2+X+1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kX^k=X^{2n+3}+X^{2n+1}+X^2+1.$$

Définition 6

Soient $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme composé, noté $P\circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P\circ Q=\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

Remarque : Il n'y a pas de notion de domaine de définition pour les polynômes, ainsi la composée a toujours un sens.

Proposition 6

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$\widetilde{P\circ Q}=\widetilde{P}\circ\widetilde{Q}.$$

Preuve. Posons $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Soit $x\in\mathbb{K}$,

$$\widetilde{P}\circ\widetilde{Q}(x)=\widetilde{P}\left(\widetilde{Q}(x)\right)=\sum_{k=0}^{n} a_k\widetilde{Q}(x)^k=\widetilde{\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k}(x)=\widetilde{P\circ Q}(x).$$

Donc :

$$\widetilde{P\circ Q}=\widetilde{P}\circ\widetilde{Q}.$$

□

Proposition 7

Soit $P, Q, R\in\mathbb{K}[X]$ et soient $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.

- $(\lambda P+\mu Q)\circ R=\lambda P\circ R+\mu Q\circ R$
- $(P.Q)\circ R=(P\circ R).(Q\circ R)$
- $(P\circ Q)\circ R=P\circ(Q\circ R)$
- $X\circ P=P\circ X=P$

Remarque : Le dernier point montre que $P(X)=P$. On peut donc choisir de noter ou non l'indéterminée.

Preuve. Posons $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $R=\sum_{k=0}^{n} c_k X^k\in\mathbb{K}[X]$.

- $(\lambda P+\mu Q)\circ R=\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)R^k=\lambda\sum_{k=0}^{n} a_k R^k+\mu\sum_{k=0}^{n} b_k R^k=\lambda P\circ R+\mu Q\circ R$
- Posons $P.Q=\sum_{k=0}^{2n} d_k X^k$.

  $(P.Q)\circ R=\sum_{k=0}^{2n} d_k R^k$ et :

  $(P\circ R).(Q\circ R)=\left(\sum_{k=0}^{n} a_k R^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k R^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j R^{k+j}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=k}^{k+n} a_k b_{l-k} R^l$ en posant $l=k+j$.

  Donc : $(P\circ R).(Q\circ R)=\sum_{l=0}^{2n}\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} R^l=\sum_{l=0}^{2n} d_l R^l=(P.Q)\circ R$.
- $(P\circ Q)\circ R=\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k\circ R$.

  Montrons que : $\forall k\in\mathbb{N}, Q^k\circ R=(Q\circ R)^k$.
  - Pour $k=0$, on a :$Q^k\circ R=1=(Q\circ R)^k$.
  - Soit $k\in\mathbb{N}$, supposons que : $Q^k\circ R=(Q\circ R)^k$. On a :
    $Q^{k+1}\circ R=(Q^k.Q)\circ R=(Q^k\circ R).Q\circ R=(Q\circ R)^k.Q\circ R=(Q\circ R)^{k+1}$.
  - Donc, par récurrence : $\forall k\in\mathbb{N}, Q^k\circ R=(Q\circ R)^k$.

  Ainsi : $(P\circ Q)\circ R=\sum_{k=0}^{n} a_k(Q\circ R)^k=P\circ(Q\circ R)$.
- $X\circ P=P=P\circ X$

□

1.3 Degré d'un polynôme

Définition 7

Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
Si P est non nul, on appelle **degré du polynôme** P le plus grand entier naturel n tel que $a_n \neq 0$. On note cet entier $\deg(P)$:

$$\deg P = \max(k \in [\![0, m]\!],\ a_k \neq 0).$$

Si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$ par convention.
Si $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$, le coefficient a_n est appelé coefficient dominant de P.
On dit que P est **unitaire** si et seulement si son coefficient dominant est égal à 1.

Remarque : Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on peut uniquement dire que $\deg(P) \leq n$. Il faut savoir que $a_n \neq 0$ pour dire que $\deg(P) = n$. On a ainsi :

$$\deg(aX^2 + bX + c) = \begin{cases} 2 & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c \neq 0 \\ -\infty & \text{si } a = b = c = 0. \end{cases}$$

Définition 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ,\ \deg(P) \leq n\}$$

1.4 Opérations sur les degrés

Proposition 8

Soient P, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   De plus, si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$ et si $\lambda = 0$ alors $\deg(\lambda P) = -\infty$;
3. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$;
4. Si $P \neq 0$, soit $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P^n) = n.\deg(P)$;
5. Si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P).\deg(Q)$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 2 :**
On pose : $P = X^3 - X^2 + 1$ et $Q = X - 5$, calculer :

- $\deg(3P + 5Q)$:

- $\deg(P + X^2.Q)$:

- $\deg(P - X^2.Q)$:

- $\deg(P.Q)$:

- $\deg(P.Q^2)$:

- $\deg(P.(3P + 5Q)^2)$:

- $\deg(P(X^3))$:

- $\deg(P(X^3).Q(X))$:

- $\deg(P(X)^3.Q(X))$:

➪ **Exemple 3 :**
Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P(X+1) - P(X) = X.$$

Remarque : Dans ce type de questions, on cherche d'abord des informations sur le degré. Si les calculs ne sont pas trop compliqués, on pourra alors raisonner par coefficients indéterminés.

Corollaire 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P.Q = 0 \Longleftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Remarque : Par contraposée, le produit de deux polynômes non nuls est non nul.

Preuve.

□

Corollaire 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X].$$

Preuve.

□

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

2.1 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 9

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B **divise** A dans $\mathbb{K}[X]$ ou que A est **un multiple de** B dans $\mathbb{K}[X]$ et on note $B|A$ s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $A = BC$.

Proposition 9

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$. Si $B|A$, alors :

$$\deg B \leq \deg A.$$

Preuve.

□

2.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 1 : division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

On appelle Q le **quotient** et R le **reste** dans la **division euclidienne de** A **par** B.

Remarque : En pratique, on utilise le même algorithme pour la division euclidienne de polynômes que pour la division euclidienne de nombres.

$$\begin{array}{r|l}
X^3 - 3X^2 + 3X + 1 & X - 2 \\
\hline
-(X^3 - 2X^2) \quad\quad\quad\quad & X^2 - X + 1 \\
-X^2 + 3X + 1 & \\
-(-X^2 + 2X) \quad\; & \\
X + 1 & \\
-(X - 2) & \\
3 &
\end{array}$$

Preuve.

□

Corollaire 3

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. On a : B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

➪ **Exemple 4 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $P = X^4 + X^3 + 3X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + 1$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer a et b tels que $Q|P$.

III Evaluation polynomiale et racines

3.1 Evaluation polynomiale

Définition 10

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$. On pose :

$$P(a) = \sum_{k=0}^{m} a_k a^k.$$

Remarque :

- Lorsqu'on évalue un polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ en $a \in \mathbb{K}$, on a : $P(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a^k$. C'est en fait la fonction polynomiale qui est évaluée en a. En termes de polynômes, le polynôme P est composé avec le polynôme constant égal à a.
- L'écriture $P(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a^k$ nécessite de faire $n-1$ produits pour le calcul des puissances de a et n produit avec les coefficients, soit $2n-2$ produits.
  Afin de minimiser le nombre de produits dans l'évaluation polynomiale on peut utiliser la méthode de Horner. Cette méthode consiste à écrire :
  $$P(a) = ((((a_n.a + a_{n-1})a + a_{n-2})a + \dots)a + a_1)a) + a_0.$$
  Il y a donc n produits à effectuer. A chaque étape, on multiplie le terme par a et on ajoute le coefficient.
  Par exemple, si $P = 3X^4 - 2X^3 + 7X^2 + X - 1$ et $a = 2$, on part du coefficient dominant qui est 3 et on a :
  $$3 \xrightarrow[\cdots \times 2 - 2]{} 4 \xrightarrow[\cdots \times 2 + 7]{} 15 \xrightarrow[\cdots \times 2 + 1]{} 31 \xrightarrow[\cdots \times 2 - 1]{} 61$$
  Donc $P(2) = 61$.

3.2 Racines d'un polynôme

Définition 11

On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une **racine** dans $\mathbb{K}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ ssi $P(a) = 0$.

Proposition 10

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)$ est $P(a)$.
- a est racine de P si et seulement si $X-a$ divise P.

Preuve.

□

Proposition 11

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
$a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont racines de P si et seulement si $\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)|P$.

➪ **Exemple 5 :** Montrer que :

$$X^2-2X|(X-1)^4+(X-1)^2-2.$$

➪ **Exemple 6 :** Déterminer tous les P de degré 3 tels que $P(0)=P(1)=P(2)=0$.

3.3 Nombre de racines

Proposition 12

Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines deux à deux distinctes.

Preuve. $\square$

Corollaire 4

- Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
- Le seul polynôme qui possède une infinité de racines (distinctes) est le polynôme nul.

Remarque : Si on montre qu'un polynôme est nul sur un ensemble infini, alors il est nul.

➪ **Exemple 7 :**
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\sum_{k=0}^{n} P^2(k) = 0$. Montrer que $P = 0$.

Corollaire 5

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{P} = 0,$$

autrement dit :

$$(\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0).$$

Preuve.

□

Corollaire 6

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, soit D un ensemble infini :

$$P = Q \Leftrightarrow \forall x \in D, \widetilde{P}(x) = \widetilde{Q}(x).$$

Remarque : Ce résultat permet de faire des identifications de fonctions polynomiales.

3.4 Multiplicité d'une racine

Définition 12

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. On appelle ordre de multiplicité de la racine a, le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-a)^m$ divise P, autrement dit, l'entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(X-a)^m \mid P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \nmid P$$

On dit alors que a est racine d'ordre m ou de multiplicité m de P.

Remarque : On parle de racine simple pour $m = 1$, double pour $m = 2$ et triple pour $m = 3$.

Proposition 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
a est racine de multiplicité m de P ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et a n'est pas racine de Q.

Preuve.

□

Corollaire 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, soit $n = \deg(P)$.
P admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité.

Remarque : Compter les racines avec leur multiplicité signifie qu'on ne compte pas chaque racine de la même façon mais qu'on leur attribue un poids. Par exemple, pour $P = (X-1)^3(X-2)^2$, P admet 2 racines distinctes : 1 de multiplicité 3 et 2 de multiplicité de 2 donc 5 racines comptées avec leur multiplicité.

Preuve.

□

3.5 Polynômes scindés

Définition 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est scindé dans $\mathbb{K}$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$$

Remarque : La notion de polynôme scindé dépend de $\mathbb{K}$:

- $P = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
- $P = X^3 + X = X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 14

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. P est scindé dans $\mathbb{K}$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{k} (X - a_j)^{m_j}.$$

On a alors :

- λ est le coefficient dominant de P,
- les $a_j \in \mathbb{K}$ sont les racines de P de multiplicité m_j,
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_j = \deg(P)$.

Remarque : Ce résultat est la définition dans laquelle on a regroupé les facteurs identiques.

3.6 Somme et produit des racines d'un polynôme

Proposition 15 : Relations coefficients/racines

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que : $P = \lambda \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X - x_j)$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Remarque : Ce résultat donne la somme et le produit des racines d'un polynômes scindés. On retrouve le cas particulier les polynômes de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ où la somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$ et le produit vaut $\frac{c}{a}$.

Preuve.

□

IV Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

4.1 Généralités

Définition 14

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P et on note P' le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) a_{l+1} X^l.$$

Remarque : Il n'y a pas d'étude de dérivabilité à faire et surtout pas de taux d'accroissement à écrire.

Proposition 16

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\widetilde{(P')} = (\widetilde{P})'.$$

Autrement dit la fonction polynomiale associée à la dérivée est la dérivée de la fonction polynomiale associée au polynôme.

Définition 15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P en posant

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$$

Proposition 17

Soient $n, k \in \mathbb{N}$,

$$(X^n)^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

□

Proposition 18

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \deg(P^{(k)}) = \begin{cases} \deg(P) - k & \text{si } \deg P \geq k \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Corollaire 8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg P \leq n \Longleftrightarrow P^{(n+1)} = 0.$$

➪ **Exemple 8 :**

1. On pose : $P = X^4 + 3X^3 + 2X + 5$ et $Q = X^2 - 8X + 1$.
   Calculer les degrés de $P.Q'$, $(P \circ Q)'$, $P' - XQ$, $P' - 4XQ$, $P'' \circ Q$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ et $Q = X^2 - X + 1$.
   Calculer le degré et le coefficient dominant de $P' \circ Q$.

4.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 19

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $(P.Q)' = P'.Q + P.Q'$.

Proposition 20 : Formule de Leibniz

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Proposition 21

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$$

4.3 Formule de Taylor polynomiale

Proposition 22 : Formule de Taylor polynomiale

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leq N$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

et :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Remarque : Cette formule permet de privilégier le point a.

Preuve.

□

➪ **Exemple 9 :** Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2) = 6,\ P'(2) = 1,\ P''(2) = 4,$$

$$\forall n \geq 3,\ P^{(n)}(2) = 0.$$

4.4 Dérivées successives et multiplicité

Proposition 23

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
a est racine de multiplicité m de P ssi, pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, a est racine de $P^{(k)}$ et a n'est pas racine de $P^{(m)}$.

Preuve.

□

Corollaire 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$ une racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P , soit $k \in [\![0, m-1]\!]$.
Alors a est racine de multiplicité $m-k$ de $P^{(k)}$.

Preuve.

□

Corollaire 10

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\overline{a}$ est racine de P de multiplicité m.

Preuve.

□

➪ **Exemple 10 :**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$Q = \frac{1}{2}(X-a)(P' + P'(a)) - P + P(a).$$

Montrer que a est une racine au moins triple de Q.

➪ **Exemple 11 :**

1. Montrer que : $(X^2-4)^2 | X^6 - 9X^4 + 24X^2 - 16$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $(X-1)^2 | nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

V Polynômes irréductibles

5.1 Théorème de D'Alembert-Gauss

Théorème 2 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 11

- Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
- Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 0$ admet exactement n racines comptées avec leur multiplicité.

5.2 Polynômes irréductibles

Définition 16

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. P et Q sont dits associés ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.

Remarque : Les polynômes associés sont les polynômes tels que $P|Q$ et $Q|P$.

Définition 17

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si P est non constant et si les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls (i.e les polynômes associés à 1) et les polynômes associés à P.
Ainsi, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible ssi :

- P est non constant
- $\forall A \in \mathbb{K}[X],\ A|P \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ A = \lambda$ ou $A = \lambda P$

5.3 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Proposition 24

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Preuve.

□

Théorème 3

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$, alors P s'écrit de façon unique (à l'ordre près des facteurs) en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{m_k}$$

où $n \in \mathbb{N}$, λ est le coefficient dominant de P, $a_1, \cdots, a_n$ sont les racines deux à deux distinctes de P de multiplicité $m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{N}^*$.

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 25

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on a : $P|Q$ ssi pour toute racine $a \in \mathbb{C}$ de P de multiplicité m, a est racine de Q de multiplicité m' avec $m' \geq m$.

5.4 Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 26

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Preuve.

□

Théorème 4

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$, alors P s'écrit de manière unique (à l'ordre près)en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}$$

où $p, q \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est le coefficient dominant de P, $a_1, \dots, a_p$ sont les racines réelles deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$, les couples de réels $(b_1, c_1), \dots, (b_q, c_q)$ sont deux à deux distincts et tels que pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, $b_k^2 - 4c_k < 0$ et $n_1, \dots, n_q \in \mathbb{N}^*$.

➪ **Exemple 13 :**
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- $P_1 = X^3 - 4X^2 + X + 6$,
- $P_2 = X^3 + X^2 - 2$,
- $P_3 = (X^2+1)^2 - (X+1)^2$,
- $P_4 = (X^2+2)^2 + X^2$,
- $P_5 = X^8 + X^4 + 1$.

VI Introduction à la décomposition en éléments simples

Définition 18

On appelle fraction rationnelle un quotient de polynômes dont le dénominateur est non nul :

$$\frac{P}{Q},\ P, Q \in \mathbb{K}[X],\ Q \neq 0.$$

Les zéros de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sont les racines de P.
Les pôles de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sont les racines de Q.

Remarque : On ne donne pas la définition ni les propriétés formelles des fractions rationnelles. L'objectif de cette partie est calculatoire. On remarquera quand même que, comme pour les polynômes, il n'y a pas de notion de domaine de définition.

Théorème 5 : décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$ tel que Q soit scindé à racines simples : il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ **deux à deux distincts** tels que $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$. Soit A le quotient de la division euclidienne de P par Q. Alors, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - a_k}.$$

Remarque :

- Si $\deg P < \deg Q$, alors $A = 0$.
- Ce théorème ne concerne que les fractions rationnelles à pôles simples, la décomposition en élément simple existe dans les autres cas mais sa forme doit être donnée.
- La décomposition en éléments simples est utile pour calculer des primitives et des dérivées k-ièmes.

➪ **Exemple 14 :** Déterminer la décomposition en éléments simples de :

1. $F_1 = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$,

2. $F_2 = \frac{4X^3}{X^4-1}$.

➪ **Exemple 15 :**

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$

2. On pose :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}. \end{array}$$

   (a) Déterminer une primitive de f.

   (b) Déterminer les dérivées n-ièmes de f pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

➪ **Exemple 16 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de :

1. $F_n = \dfrac{1}{X^n - 1}$,

2. $G_n = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.