

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

1.1 Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel

Définition 1

Soit E un ensemble muni :

- d'une addition notée $+$, c'est à dire une application :

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

- d'une multiplication externe notée $\cdot$, aussi appelée multiplication par un scalaire, c'est à dire une application :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, y) &\mapsto \lambda \cdot y \end{aligned}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ssi :

- L'addition de E possède les propriétés suivantes :
 - * $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)
On pourra ainsi écrire $x + y + z$.
 - * $\exists e \in E, \forall x \in E, x + e = e + x = x$.
Un tel e est unique et on le note généralement 0_E .
 - * $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = x' + x = 0_E$.
Un tel x' est unique. On l'appelle opposé de x et on le note $-x$. On a ainsi : $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.
 - * $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$ (commutativité).
- La multiplication par un scalaire vérifie :
 - * $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
 - * $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
 - * $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$.
 - * $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.

Les éléments de E sont appelés les vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Proposition 1

- Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a : $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$.
- Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a : $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$.

Preuve.

□

Proposition 2

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,
- $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Preuve.

□

Remarque :

- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et mais n'est pas un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Proposition 3

Soit A un ensemble non vide, soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. L'ensemble $\mathcal{F}(A, E)$ des fonctions de A dans E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Preuve. □

Corollaire 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $(x_k)_{k \in [1, n]}$ une famille de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_k)_{k \in [1, n]}$ tout vecteur de la forme :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k,$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

1.2 Sous-espaces vectoriels**Définition 3**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E ssi

- $F \neq \emptyset$
- $\forall x, y \in F, x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda.x \in F$

Proposition 4

Soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Preuve. □

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $F \neq \emptyset$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda.x + \mu.y \in F$

Remarque : Un sous-espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires.

Preuve. □

Corollaire 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in F, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F.$$

Remarque :

- E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
- On a déjà rencontré des sous-espaces vectoriels :
 - $\mathcal{C}^0(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
 - $\mathcal{C}^n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- ...

Proposition 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel tel que $E \neq \{0_E\}$. Soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$. Posons :

$$F = \{\lambda x_0, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est une droite vectorielle.

Preuve.

□

⇔ Exemple 1 :

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 1\}$
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xy + z = 0\}$
4. $E = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\}$
5. $E = \{P \in \mathbb{K}[X], P'(2) = 0\}$
6. $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lim_{+\infty} f = 0\}$

1.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve.

□

Définition 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E . L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$ et noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$ ou $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition 8

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E .

- Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in F$, alors :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset F$$

- $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel contenant la famille $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Preuve.

□

Proposition 9

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E . Alors $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathcal{F}$:

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Preuve.

□

Remarque :

- Si $u \neq 0_E$, $\text{Vect}(u) = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{K}\}$ donc l'espace vectoriel engendré par le vecteur u est une droite vectorielle.
- On a déjà rencontré des sous-espaces vectoriels engendrés :
 - $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$
 - L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de $y' + a(x)y = 0$ est $\mathcal{S}_0 = \text{Vect}(f)$ où $f : x \mapsto e^{-A(x)}$.
 - ...

Exemple 2 :

1. On pose : $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, -1)$ et $v = (0, 1, -1)$. Déterminer $\text{Vect}(u, v)$.
2. On pose : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$. Ecrire E sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré.
3. On pose : $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$. Ecrire E sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré.

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k \in [1, n]}$ une famille de vecteurs de E . Soit $\mathcal{G} = (x_k)_{k \in I}$ une sous-famille de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telle que : $I \subset [1, n]$, alors :

$$\text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{F}).$$

Preuve. □

Proposition 11

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $\mathcal{F} = (x_k)_{k \in [1, n]}$ une famille de vecteurs de E .
Si $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, x) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Preuve. □

1.4 Somme de sous-espaces vectoriels**Définition 5**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , on appelle somme de F et G et on note $F + G$ l'ensemble :

$$F + G = \{x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in G\} = \{x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2\}.$$

Proposition 12

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve. □

Proposition 13

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $\mathcal{F} = (x_k)_{k \in [1, n]}$ et $\mathcal{G} = (y_k)_{k \in [1, p]}$ des familles de vecteurs de E . On a :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) + \text{Vect}(y_1, \dots, y_p) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p).$$

1.5 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires**Définition 6**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
On dit que la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $F + G = F \oplus G$.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
La somme $F + G$ est directe si et seulement si :

$$\forall x \in F + G, \exists!(x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2.$$

Remarque : La somme directe correspond à l'**unicité** de la décomposition.

Preuve. □

Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont supplémentaires dans E ssi :

$$E = F \oplus G,$$

c'est -à-dire ssi :

$$E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}$$

c'est -à-dire ssi :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2.$$

⇔ Exemple 3 :

- Posons $E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 0)$, $F = \text{Vect}(u)$, $v = (x, y)$ avec $y \neq 0$ et $G = \text{Vect}(v)$. Montrer que :

$$E = F \oplus G.$$

On a montré que F admet une infinité de supplémentaires, il n'y a donc pas unicité du supplémentaire.

- Posons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, 1)$. Montrer que :

$$E = F \oplus G.$$

- Posons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists \lambda \in \mathbb{R}, f = \lambda\}$. Montrer que :

$$E = F \oplus G.$$

⇔ Exemple 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient A et B des sous-espaces vectoriels de E , soit C un supplémentaire de $A \cap B$ dans B , c'est-à-dire tel que $(A \cap B) \oplus C = B$.

Montrer que A et C sont supplémentaires dans $A + B$.

II Familles finies de vecteurs

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2.1 Famille libre, famille liée

Définition 8

Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments de E .

- On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée ssi :

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0.$$

- On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre de E ssi elle n'est pas liée c'est-à-dire ssi :

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0 \right).$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants.

Remarque :

- (x_1, x_2) est libre ssi x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires.

- (x_1, x_2, x_3) est libre ssi x_1, x_2 et x_3 ne sont pas coplanaires.
- L'argument "les fonctions cos et sin ne sont pas proportionnelles" est un argument de liberté.

⇔ **Exemple 5 :**

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées?

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 0, -1)$, $x_3 = (0, 1, 0)$,
- Dans $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 1, 1)$, $x_3 = (0, 1, 0)$,
- Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$.

Proposition 15

- Une famille à un vecteur (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, alors : $\forall i \neq j, x_i \neq x_j$.
Soit $p \leq n$.
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre alors $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
- Si $(x_1, \dots, x_p)$ est liée alors $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

Preuve.

□

Proposition 16

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E . $(x_1, \dots, x_n)$ est liée ssi l'un des vecteurs x_i s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

Preuve.

□

Théorème 1

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de E
Soit $x \in E$ tel que la famille $(x, x_1, \dots, x_n)$ soit liée. Alors :

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Preuve.

□

Définition 9

On dit que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est de degrés échelonnés ssi $\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$.

Proposition 17

Toute famille finie de polynômes non nuls et de degrés échelonnés est libre.
Plus généralement, toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Preuve.

□

2.2 Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Définition 10

Une famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est dite génératrice de E ssi :

$$\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) = E.$$

Autrement dit, $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E ssi :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

⇔ **Exemple 6 :**

1. Posons $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$, $x_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Posons $E = \mathbb{R}_1[X]$, $P_1 = X$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = X - 1$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est génératrice de E .

2.3 Bases

Définition 11

Une famille d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une base de E ssi la famille est libre et génératrice de E .

Exemple 7 :

- On reprend l'exemple précédent : posons $E = \mathbb{R}^3$, $x_1 = (1, 1, -1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$, $x_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que la famille (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Posons $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$. Déterminer une base de E .
- Posons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P'(0) = 0\}$. Déterminer une base de E .

Théorème 2

Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E est une base de E ssi :

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Preuve. □

Définition 12

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle coordonnées de x dans la base B l'unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Proposition 18

- Dans $\mathbb{K}^n$, on pose :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

- La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i, j) , c'est-à-dire la matrice n'ayant que des 0, sauf un 1 en position (i, j) .
La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Preuve. □

2.4 Bases et espaces supplémentaires

Proposition 19

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Soient $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille de G .

Si $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_q)$ sont des bases respectivement de F et G et si F et G sont supplémentaires dans E alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E , appelée base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.

Preuve. □

III Espaces vectoriels de dimension finie

3.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 13

On dit qu'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Proposition 20

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{G} = (x_i)_{i \in [1, n]}$ une famille génératrice finie de E .
Si $\mathcal{L} = (x_i)_{i \in J}$, avec $J \subset [1, n]$, est une sous-famille libre de $\mathcal{G}$, alors il existe I tel que $J \subset I \subset [1, n]$ et tel que $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ soit une base de E .

Preuve.

Notons :

$$A = \{\text{Card}(I), J \subset I \subset [1, n] \text{ et } (x_i)_{i \in I} \text{ libre}\}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient $\text{Card}(J)$) et elle est majorée par n , elle admet donc un maximum p .

On considère le maximum, car on ne s'intéresse qu'aux familles libres dans la définition de A , il faut donc en chercher une de cardinal maximum pour espérer qu'elle soit génératrice.

Soit I un ensemble tel que $J \subset I \subset [1, n]$, $(x_i)_{i \in I}$ libre et $\text{Card}(I) = p$.

Un tel ensemble existe car le maximum est atteint.

Montrons que $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ est une base de E .

Par définition $\mathcal{B}$ est libre.

Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de E .

On sait que $(x_i)_{i \in [1, n]}$ est génératrice de E , donc ce n'est pas la peine de partir d'un vecteurs quelconque de E , on peut partir d'un des x_i .
De plus, si $i \in I$, x_i est déjà dans $\mathcal{B}$ donc ce n'est pas la peine de traiter ce cas.

Soit $k \in [1, n] \setminus I$.

Comme $p = \max A$, alors la famille $(x_k) \cup (x_i)_{i \in I}$ est liée.

Elle est liée car de cardinal $p + 1 > p$.

Or, comme $(x_i)_{i \in I}$ est libre, il existe $(\lambda_i)_{i \in I}$ famille de $\mathbb{K}$ telle que :

$$x_k = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

C'est le théorème 1.

Ainsi : $x_k \in \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

De plus, si $k \in I$, alors $x_k \in \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ Donc :

$$\text{Vect}(x_k)_{k \in [1, n]} \subset \text{Vect}(x_i)_{i \in I}.$$

Or $\text{Vect}(x_k)_{k \in [1, n]} = E$ car $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E . Donc :

$$\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E.$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E .

Donc $\mathcal{B}$ est une base de E .

□

Corollaire 3

Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet au moins une base.

Notation : Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie d'éléments de E .

Le nombre de vecteurs (distincts ou non) de $\mathcal{F}$ est appelé le cardinal de $\mathcal{F}$ et est noté $\text{Card}(\mathcal{F})$. On a donc :

$$\text{Card}(\mathcal{F}) = n.$$

Proposition 21 : Lemme de Steinitz

Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Preuve. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E .

Soit $(x_j)_{j \in [1, n+1]}$ une famille de $n + 1$ vecteurs de E .

Pour tout $j \in [1, n + 1]$, on pose $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$.

On peut le faire car $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E . On utilise une double indexation car les scalaires dépendent du vecteur que l'on décompose.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = 0_E &\iff \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \right) = 0_E \\ &\iff \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} \right) e_i = 0_E \end{aligned}$$

On cherche des informations pour obtenir une combinaison linéaire nulle.

Or,

$$\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} = 0 \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{1,j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{n,j} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{1,2} + \dots + \lambda_{n+1} a_{1,n+1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{n,1} + \lambda_2 a_{n,2} + \dots + \lambda_{n+1} a_{n,n+1} = 0 \end{cases} \quad (S)$$

(S) est un système homogène à n équations et $n+1$ inconnues. Ainsi, il admet une infinité de solutions donc au moins une non nulle. Ainsi,

$$\text{il existe } (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \text{ tel que : } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{1,j} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{n,j} = 0 \end{cases},$$

donc tel que : $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{i,j} = 0$, donc tel que : $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j = 0$.

Ainsi la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée. □

Corollaire 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel admettant une famille génératrice constituée de n vecteurs. Alors :

- Toute famille libre de E admet au plus n éléments.
- Toute famille d'au moins $n+1$ éléments est liée.

Théorème 3

Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments.

Preuve. □

Définition 14

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On appelle dimension de E et on note $\dim(E)$ le nombre d'éléments de chacune de ses bases.
- Si $E = \{0\}$, on pose par convention $\dim(E) = 0$.

Remarque : L'espace réduit à 0 n'admet pas de base mais il admet une dimension qui est 0.

Exemple 8 :

Calculer la dimension des espaces suivants :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}$,
2. $E = \{(x, 2x, 3x), x \in \mathbb{R}\}$,
3. $E = \text{Vect}(f_1, f_2)$,
4. $E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, 2x = y\}$, on traitera le cas où E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et celui où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Remarque : On a déjà vu la dimension des espaces suivants :

- L'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$ est $\text{Vect}(x \mapsto e^{-A(x)})$, il est de dimension 1.
- L'ensemble des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ est $\text{Vect}(u, v)$, avec :
 - $u : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $v : x \mapsto e^{r_2 x}$ si $b^2 - 4ac \neq 0$ dans $\mathbb{C}$ ou $b^2 - 4ac > 0$ dans $\mathbb{R}$.
 - $u : x \mapsto e^{rx}$ et $v : x \mapsto xe^{rx}$ si $b^2 - 4ac = 0$.
 - $u : x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ et $v : x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ si $b^2 - 4ac < 0$ dans $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, il est de dimension 2.

- L'ensemble des suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est $\text{Vect}((v_n), (w_n))$, avec :
 - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ si $a^2 - 4b \neq 0$.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ si $a^2 - 4b = 0$.

Dans tous les cas, il est de dimension 2.

Théorème 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E , soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E .

Alors, on peut compléter $\mathcal{L}$ par des éléments de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base de E .

Preuve.

□

Corollaire 5 : Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_1, \dots, x_p)$, $p \leq n$ une famille libre de E . Alors, il existe $x_{p+1}, \dots, x_n \in E$ tels que $(x_1, \dots, x_n)$ soit une base de E .

Preuve.

□

Corollaire 6 : Théorème de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_1, \dots, x_p)$, $p \geq n$ une famille génératrice de E . Alors, il existe $I \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $(x_i)_{i \in I}$ soit une base de E .

Preuve.

□

Corollaire 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Alors :

- Toute famille libre de E admet au plus n éléments.
- Toute famille de E ayant au moins $n + 1$ éléments est liée.
- Toute famille génératrice de E admet au moins n éléments.

Preuve.

□

3.2 Exemples

Proposition 22

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

Preuve.

□

Corollaire 8

$\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

Preuve.

□

3.3 Caractérisation des bases

Proposition 23

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{F}$ est libre.
- $\mathcal{F}$ est génératrice de E .
- $\mathcal{F}$ est une base de E .

Preuve.

□

Corollaire 9

Dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, soient $n + 1$ polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n$ tels que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on ait $\deg(P_k) = k$. Alors la famille $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Preuve.

□

⇔ **Exemple 9 :** Posons : $\forall k \in \mathbb{N}, P_k = (X + k)^k$.

Montrer que la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{C}_n[X]$.

3.4 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 15

Soit $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E , on appelle rang de $\mathcal{F}$ et on note $\text{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\text{Vect}(\mathcal{F})$:

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})).$$

Proposition 24

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des familles finies de E .

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \Rightarrow \text{rg} \mathcal{F} \leq \text{rg} \mathcal{F}'.$$

Preuve. □

Proposition 25

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dimension finie n . Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille d'éléments de E . On a :

- $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) \leq \min(n, p)$.
- La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$.

Preuve. □

Remarque : En pratique, pour faire un calcul de rang, on élimine les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs jusqu'à se ramener à une famille libre.

⇨ **Exemple 10 :**

Calculer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 2)$, $x_3 = (-1, 2, -3)$,
2. $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 1, 3)$, $x_3 = (0, 1, 2)$, $x_4 = (1, 2, 4)$.

IV Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

4.1 Dimension

Proposition 26

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
- $\dim E = \dim F$ si et seulement si $F = E$.

Preuve.

- Notons $n = \dim E \in \mathbb{N}$.

Si $F = \{0\}$ alors $\dim F = 0$ et le résultat est immédiat.

On suppose dans toute la suite $F \neq \{0_E\}$ et a fortiori $E \neq \{0_E\}$.

Comme $F \neq \{0_E\}$, il existe $x_1 \in F \setminus \{0_E\}$. (x_1) est alors une famille libre de F .

☞ On ne sait pas que F est de dimension finie, cela fait partie de ce que l'on peut prouver, on ne peut donc pas considérer de famille génératrice de F . On considère donc une famille libre.

On pose

$$A = \{\text{Card } \mathcal{L}, \mathcal{L} \text{ est une famille libre de } F\}$$

A est une partie non vide ($1 \in A$ car (x_1) est une famille libre de F) et majorée par n . En effet, toute famille libre de F est une famille libre de E donc a au plus n vecteurs.

Ainsi, A admet un plus grand élément $p \leq n$.

☞ On cherche une famille libre la plus "grande" possible de façon à obtenir une base.

Considérons $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de p vecteurs de F . Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice de F .

Soit $x \in F$. La famille $(e_1, \dots, e_p, x)$ est une famille de $p+1$ vecteurs de F donc cette famille est liée (par définition de p).

☞ Car p est le maximum.

Ainsi, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda x = 0_E.$$

Il faut maintenant isoler x , on a donc envie de diviser par λ .

Si $\lambda = 0$, alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E$ donc pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_i = 0$ car la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre. Ceci contredit le fait que les scalaires sont non tous nuls.

Ainsi, $\lambda \neq 0$.

Donc :

$$x = \sum_{i=1}^p \frac{-\lambda_i}{\lambda} e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$

Ainsi $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de F .

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre, c'est une base de F .

Ainsi, F est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim F = p \leq n = \dim E$.

- Si $F = E$, on a clairement $\dim E = \dim F$.
- Supposons $\dim E = \dim F = n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F . Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de n vecteurs de E (puisque $F \subset E$), et c'est donc une base de E . Ainsi, $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.

□

4.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 5

Tout sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Preuve.

□

Proposition 27

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque E tels que $F + G$ soit directe. Alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Preuve.

□

Proposition 28 : Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque E . Alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Preuve.

□

Proposition 29

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E . Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $E = F \oplus G$
- (ii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$
- (iii) $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 11** : Posons $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_0[X]$. Montrer que :

$$F \oplus G = \mathbb{R}_2[X].$$