Chapitre 22 : Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

I Univers, événements, variables aléatoires

1.1 Vocabulaire des probabilités

Définition 1

- Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut prédire pas avec certitude la résultat.
- L'ensemble des **issues** (ou **résultats possibles** ou **réalisations**) d'une expérience aléatoire est appelé **univers** (ou **univers des possibles**) et souvent noté Ω.

Dans toute la suite, on se limite au cas où l'univers Ω est fini.

Remarque :

- On lance un dé à 6 face et on note le numéro de la face supérieure.
  On peut associer à cette expérience l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$.
- On lance une pièce et on note le résultat obtenu P pour pile et F pour face.
  On peut associer à cette expérience l'univers $\Omega = \{P, F\}$.
- On s'intéresse à une urne contenant 4 boules numérotées 1,2,3 et 4.
  - On tire successivement deux boules avec remise.
    On peut associer à cette expérience l'univers $\Omega = [\![1,4]\!]^2$.
  - On tire successivement deux boules sans remise.
    On peut associer à cette expérience l'univers $\Omega = \{(i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\ i \neq j\}$.
  - On tire simultanément deux boules.
    On peut associer à cette expérience l'univers $\Omega = \left\{\{i,j\},\ i,j \in [\![1,4]\!],\ i < j\right\}$.

Définition 2

Soit Ω un univers fini.

- Toute partie de Ω est appelée **événement**. L'ensemble des événements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.
- Soit A un événement (c'est-à-dire $A \subset \Omega$). Soit ω le résultat d'une expérience aléatoire. On dit que l'événement A est réalisé ssi $\omega \in A$.

Remarque :

- On lance un dé à 6 faces.
  On associe à cette expérience l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]$.
  L'événement "obtenir un résultat pair" est : $A = \{2,4,6\}$.
- Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement deux boules avec remise.
  On associe à cette expérience l'univers $\Omega = [\![1,5]\!]^2$.
  L'événement "obtenir un résultat dont la somme est 4" est : $A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.
- Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement deux boules sans remise.
  On associe à cette expérience l'univers $\Omega = \{(i,j) \in [\![1,5]\!]^2,\ i \neq j\}$.
  L'événement "obtenir un résultat dont la somme est 4" est : $A = \{(1,3),(3,1)\}$.
- Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire simultanément deux boules.
  On associe à cette expérience l'univers $\Omega = \left\{\{i,j\},\ i,j \in [\![1,5]\!],\ i < j\right\}$.
  L'événement "obtenir un résultat dont la somme est 4" est : $A = \{\{1,3\}\}$.

Définition 3

Soit Ω un univers fini. Soient A et B deux événements.

- L'ensemble Ω est appelé **événement certain**.
- L'ensemble vide est appelé **événement impossible**.
- Un singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, est appelé **événement élémentaire**.
- $\Omega \setminus A$ est appelé **événement contraire de** A et est noté $\overline{A}$.
- L'intersection $A \cap B$ de A et B est un événement, appelé événement « A et B ».
- La réunion $A \cup B$ de A et B est un événement, appelé événement « A ou B ».
- Les événements A et B sont dits **incompatibles** ssi $A \cap B = \emptyset$.
- On dit que **l'événement** A **implique l'événement** B ssi $A \subset B$.

Définition 4

Soit Ω un univers fini.
On appelle **système complet d'événements** de Ω toute famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) d'événements telle que :

- pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, on ait $A_i \cap A_j = \emptyset$,
  c'est-à-dire les $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux incompatibles.
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,
  c'est-à-dire la réunion des $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est l'événement certain.

Remarque :

- Si A est un événement, $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
- On s'intéresse à une urne contenant 4 boules numérotées 1,2,3 et 4.
  On tire deux boules successivement et sans remise. On pose, pour $i \in [\![1,4]\!]$:

  $$A_i : \text{"la première boule tirée est la boule } i\text{."}$$

  Alors la famille $(A_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ forme un système complet d'événements.

1.2 Variables aléatoires

Définition 5

Une variable aléatoire sur Ω est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
L'ensemble des valeurs prises par cette application est noté $X(\Omega) = \{X(\omega)\ ,\ \omega \in \Omega\}$.
Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Définition 6

- Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
  Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) \in A\}$.
- Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
  Soit $x \in E$, on note $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) = x\}$.
- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
  On note $\{X \le x\}$ ou $(X \le x)$ l'événement $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) \le x\}$.

Remarque : On lance deux fois de suite un dé équilibré.L'univers des possibles est : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.
L'application :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

est une variable aléatoire réelle et on a : $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$.
De plus :

- $(X = 3)$ est l'événement $\{(1,2),(2,1)\}$,
- $(X \le 3)$ est l'événement $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.

II Espaces probabilisés finis

2.1 Définition

Définition 7

Soit Ω un univers fini.
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$;
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
  c'est-à-dire si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On appelle **espace probabilisé fini** un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
Et, pour tout événement A, on appelle probabilité de A la valeur $P(A)$.

Remarque :

- Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Comme $(X \in A)$ est un événement, $P(X \in A)$ a un sens.
  De même, pour une variable aléatoire réelle, $P(X = x)$ et $P(X \leq x)$ sont bien définis.
- On lance un dé à 6 faces et on note le numéro de la face supérieure.
  On associe à cette expérience l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
  - On peut définir : $\begin{array}{rccl} P_1 : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \to & \dfrac{1}{6}\text{Card}\,(A) \end{array}$.
    P_1 est une probabilité sur Ω (correspondant au cas d'un dé non pipé).
  - On peut aussi définir : $\begin{array}{rccl} P_2 : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \to & \begin{cases} 0 & \text{si } 6 \notin A \\ 1 & \text{si } 6 \in A \end{cases} \end{array}$.
    P_2 est également une probabilité sur Ω (correspondant au cas d'un dé pipé pour tomber sur 6 à tous les coups).

2.2 Propriétés des probabilités finies

Proposition 1

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. On a :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$ (Croissance).
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Preuve.

□

Corollaire 1

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événement deux à deux incompatibles, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Corollaire 2

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements, on a : $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

2.3 Distribution de probabilités

Définition 8

Soit E un ensemble fini. On appelle distribution de probabilités sur E toute famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E dont la somme est égale à 1.

Remarque : Les éléments d'une distribution de probabilités sont nécessairement dans $[0,1]$.

Théorème 1

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilités.
Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que : $\forall \omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = p_\omega$.

Remarque : Ce résultat signifie qu'une probabilité est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.

Preuve.

□

2.4 Probabilité uniforme

Proposition 2

Soit Ω un univers fini. Soit $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $A \mapsto \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)}$.
Alors P est une probabilité sur Ω appelée équiprobabilité ou probabilité uniforme sur Ω.

Remarque : L'équiprobabilité est utilisée lorsqu'il n'y a pas de biais dans l'expérience. Elle est sous-entendue dans les énoncés pour lesquels on introduit un tirage au hasard.

Preuve.

□

Proposition 3

Soit Ω un univers fini et soit P la probabilité uniforme sur Ω. Soit $\omega \in \Omega$, alors :

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card}\,(\Omega)}.$$

Remarque : C'est de ce résultat que vient le nom d'équiprobabilité : il y a égalité des probabilités pour tous les événements élémentaires.

Preuve.

□

➪ **Exemple 1 :** On lance 5 dés différentiables non pipés. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir 5 numéros différents ?
2. d'avoir au moins un multiple de 3 ?
3. d'avoir au moins deux faces identiques ?
4. que le produit des numéros obtenus soit pair ?
5. que la somme des numéros obtenus soit paire ?
6. d'obtenir au moins un multiple de 3 et un nombre pair ?

➪ **Exemple 2 :**
Dix paires de chaussures sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir deux paires de chaussures ?
2. d'obtenir au moins une paire de chaussures ?
3. d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

III Probabilités conditionnelles

3.1 Généralités

Remarque : Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini où P est la probabilité uniforme.
Supposons que l'événement B soit réalisé. Un événement A est réalisé si et seulement $A \cap B$ est réalisé. On dira que la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé est

$$\frac{\text{nombre de cas favorables à } A\cap B}{\text{nombre de cas possibles pour } B} = \frac{\mathrm{Card}\,(A\cap B)}{\mathrm{Card}\,(B)} = \frac{\frac{\mathrm{Card}\,(A\cap B)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)}}{\frac{\mathrm{Card}\,(B)}{\mathrm{Card}\,(\Omega)}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Définition 9

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B le réel, noté $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, défini par :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Proposition 4

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit B un événements tel que $P(B) \neq 0$.
L'application

$$\begin{array}{rccc} P_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & P_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Preuve.

□

Corollaire 3

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A, B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ alors, :

$$P(B)P_B(A) = P(A\cap B).$$

Par convention, si $P(B) = 0$, on pose : $P(B)P_B(A) = 0$.

Corollaire 4

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A, B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors, :

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Preuve.

□

3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 5 : Formule des probabilités composées

Soit (Ω, P) un espace probabilité fini. Soit $n \geq 2$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements.

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Remarque : La convention introduite précédemment permet de donner un sens à ce résultat sans vérifier que les probabilités conditionnelles existent bien.

Preuve.

□

➪ **Exemple 3 :**

Un gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n clés, dont une et une seule convient. Il essaie au hasard les clés les unes après les autres.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

Calculer la probabilité que la porte s'ouvre à la k-ième tentative (et pas avant).

3.3 Formule des probabilités totales

Proposition 6 : Formule des probabilités totales

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un événement. On a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i).$$

Preuve.

□

Corollaire 5

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A, B deux événements.
On a :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 4 :**
Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.

1. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
2. Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

3.4 Formule de Bayes

Proposition 7 : Formule de Bayes

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- Soient A et B deux événements avec $P(B) \neq 0$. Alors
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$
- Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements.
Pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, on a :
$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 5 :**

Un individu est tiré au hasard dans une population où l'on trouve une proportion de 10^{-4} de gens atteints d'une maladie. On lui fait passer le test de détection de la maladie qui donne un résultat positif. Le test n'est pas infaillible. La probabilité d'avoir un résultat positif si l'individu est malade est de 0.99 et si l'individu n'est pas malade, de 0.001.
Quelle est a la probabilité pour que l'individu soit malade ?

IV Loi d'une variable aléatoire

Dans toute la suite du chapitre, (Ω, P) désignera un espace probabilisé fini.

4.1 Généralités

Proposition 8

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω. L'application
$$\begin{array}{llll} P_X : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$$
est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Preuve.

□

Définition 10

- Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire sur Ω. L'application P_X est appelée loi de probabilité de X.
- Soient $X, Y : \Omega \to E$ des variables aléatoires sur Ω. On dit que X et Y ont même loi et on note $X \sim Y$ ssi :

$$P_X = P_Y.$$

Proposition 9

Soit X une variable aléatoire. La loi de X i.e P_X est déterminé de manière unique par la donnée des $P_X(\{x\}) = P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
Et on a :

$$\forall A \subset X(\Omega),\ P(X \in A) = P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

Preuve.

□

Remarque : Déterminer la loi d'une variable aléatoire X revient à :

- Déterminer $X(\Omega)$
- Préciser, pour tout $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.

Si $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$. La loi de X peut être représentée par un tableau de la forme :

$\mathbf{x_i}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\cdots$	$P(X = x_{n-1})$	$P(X = x_n)$

➪ **Exemple 6 :** On lance deux fois de suite un dé équilibré. Un espace probabilisé adapté est alors $[\![1,6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme.
Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant la somme des deux dés.

4.2 Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition 11

Soit $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire et $f : E \to F$, $f \circ X$ définit une variable aléatoire sur Ω notée $f(X)$.

Proposition 10

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$. Posons $Y = f(X)$.
Alors, $Y(\Omega) = \{f(x)\ ,\ x \in X(\Omega)\} = \{f(X(\omega))\ ,\ \omega \in \Omega\}$ et

$$\forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)),\ P_Y(B) = P_X(f^{-1}(B)),$$

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{et } f(x) = y}} P(X = x).$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 7 :** Reprenons l'exemple précédent. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |7 - x|$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$.

Corollaire 6

Soient $X, Y : \Omega \to E$ des variables aléatoires et $f : E \to F$.
Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

4.3 Loi uniforme

Définition 12

Soit X une variable aléatoire. Soit $F = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble fini de cardinal n.
On dit que X suit la loi uniforme sur F, et on note $X \sim \mathcal{U}(F)$ lorsque :

$$X(\Omega) = F \qquad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

Remarque : Une variable X de loi uniforme sur F modélise le tirage « au hasard »d'un élément de F. Par exemple :

- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On pioche une boule au hasard et on note X le numéro de la boule piochée. X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
- Si X est la variable aléatoire représentant le résultat d'un lancer de dés équilibrés, X suit la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.

4.4 Loi de Bernoulli

Définition 13

Soit X une variable aléatoire sur Ω, on dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si et seulement si

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \qquad P(X = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

Remarque : La loi de Bernoulli modélise dans une expérience le succès $(X = 1)$ ou l'échec $(X = 0)$. Une loi de Bernoulli de paramètre p correspond donc à une expérience qui a la probabilité p de réussir. Par exemple :

- On lance une pièce qui a probabilité p de tomber sur pile. Soit X la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur pile et 0 sinon. X suit la loi $\mathcal{B}(p)$.
- Soit une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On note X la variable aléatoire égale à 0 si on a tiré une boule blanche et égale à 1 si on tire une boule noire. X suit la loi $\mathcal{B}(\frac{b}{a+b})$.

4.5 Loi binomiale

Définition 14

Soit X une variable aléatoire sur Ω, on dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si et seulement si

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Remarque : La loi binomiale de paramètres n et p modélise le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes. En effet : soit X une variable aléatoire qui modélise le nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, pour $(X = k)$, on a :

- choix de la position des k succès : $\binom{n}{k}$,
- probabilité des k succès : p^k,
- probabilité des $n-k$ échecs : $(1-p)^{n-k}$.

Donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Par exemple : soit une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages successifs avec remise. La variable aléatoire X représentant le nombre de boules blanches tirées suit alors la loi $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$ car il s'agit de la répétitions de n expériences de Bernoulli indépendantes, chacune ayant la probabilité $\frac{a}{a+b}$ de réussir.

4.6 Loi conditionnelle

Proposition 11

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.
L'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P_A(X \in B) = \dfrac{P((X \in B) \cap A)}{P(A)} \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Définition 15

En reprenant les notations de la proposition précédente, cette probabilité est appelée loi conditionnelle de X sachant A.

➪ **Exemple 8 :**
n candidats passent un examen. La probabilité de réussite pour chaque candidat est p. En cas d'échec, le candidat repasse un examen de rattrapage avec la même probabilité de réussite p. Quelle est la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves ?

4.7 Couple de variables aléatoires

Définition 16

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$.
On appelle couple des variables aléatoires X et Y, et on note $Z = (X, Y)$, l'application :

$$Z : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & E \times F \\ \omega & \mapsto & Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Définition 17

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires.

- On appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple $Z = (X, Y)$ c'est-à-dire : si $X(\Omega) = \{a_1, \dots a_n\}$, $Y(\Omega) = \{b_1, \dots b_m\}$,
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, m]\!], P_{(X,Y)}(a_i, b_j) = P((X = a_i) \cap (Y = b_j)).$$
- On appelle lois marginales de Z les lois de X et Y.

Remarque : Déterminer la loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y revient à :

- Déterminer $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$.
- Déterminer pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, la valeur de $P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

La loi conjointe de deux variables X et Y peut être représenté pas un tableau à double entrée de la forme :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_p
x_1	$P((X=x_1)\cap(Y=y_1))$	$P((X=x_1)\cap(Y=y_2))$	$\cdots$	$P((X=x_1)\cap(Y=y_p))$
x_2	$P((X=x_2)\cap(Y=y_1))$	$P((X=x_2)\cap(Y=y_2))$	$\cdots$	$P((X=x_2)\cap(Y=y_p))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$P((X=x_n)\cap(Y=y_1))$	$P((X=x_n)\cap(Y=y_2))$	$\cdots$	$P((X=x_n)\cap(Y=y_p))$

➪ **Exemple 9 :** Une urne contient 3 boules indiscernables numérotées de 1 à 3. On tire successivement deux boules avec remise, et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = \min(X_1, X_2)$.
Déterminer la loi conjointe de X et Y.

Proposition 12

Soient X, Y deux variables aléatoire. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$. Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

$$\forall j \in [\![1, p]\!],\ P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

Remarque : Autrement dit, la loi conjointe de X et de Y détermine les lois marginales du couple (X, Y). Pour cela, il suffit de sommer les lignes ou les colonnes du tableau obtenu.

Preuve.

□

➪ **Exemple 10 :** Si on reprend l'exemple précédent, on peut en déduire les lois de X et de Y.

Remarque : La réciproque est fausse : les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe. On va voir un contre-exemple.

➪ **Exemple 11 :**

1. Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches discernables. On tire deux boules successivement et avec remise.
   On note X_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si la première boule est blanche et 0 sinon.
   On note Y_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si la deuxième boule est blanche et 0 sinon.
   Déterminer la loi conjointe de (X_1, Y_1).
2. Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches discernables. On tire deux boules successivement et sans remise.
   On note X_2 la variable aléatoire qui vaut 1 si la première boule est blanche et 0 sinon.
   On note Y_2 la variable aléatoire qui vaut 1 si la deuxième boule est blanche et 0 sinon.
   Déterminer la loi conjointe de (X_2, Y_2).
3. Conclure

4.8 n-uplet de variables aléatoires

Définition 18

Soit $X_1 : \Omega \to E_1$, ..., $X_n : \Omega \to E_n$.
On appelle n-uplet des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, et on note $Z = (X_1, \dots, X_n)$, l'application :

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega & \mapsto & Z(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array}$$

Définition 19

Soit $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$.

- On appelle loi conjointe de $X_1, \ldots, X_n$ la loi du n-uplet $Z = (X_1, \ldots, X_n)$.
- On appelle lois marginales de $(X_1, \ldots, X_n)$ les lois de $X_1, \ldots, X_n$.

Remarque : Comme pour les couples de variables aléatoires, le loi conjointe d'un n-uplet détermine ses lois marginales mais la réciproque est fausse.

V Evénements indépendants

5.1 Indépendance de deux événements

Définition 20

Deux événements A et B de l'espace probabilisé (Ω, P) sont dits **indépendants** ssi :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Proposition 13

Si $P(B) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$ (la connaissance de B ne change pas la probabilité de A).

Remarque :

- Si B est un événement de probabilité nulle, alors A et B sont indépendants.
  En effet $A \cap B \subset B$ donc $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$.
- Des événements qui concernent des tirages indépendants seront indépendants. Par exemple :
  - On lance une pièce équilibrée, on note :

    $$A : \text{"on obtient face" et } B : \text{"on obtient pile".}$$

    On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Ainsi $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, donc A et B ne sont pas indépendants. Ils concernent le même tirage.
  - On effectue deux lancers successifs d'une pièce équilibrée, on note :

    $$A : \text{"on obtient face au premier lancer" et } B : \text{"on obtient pile au deuxième lancer".}$$

    On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Ainsi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc A et B sont indépendants. Ils concernent deux tirages indépendants.

Proposition 14

Soient A, B deux événements de l'espace probabilisé (Ω, P).
Si A et B sont indépendants alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
Il en est de même des événements A et $\overline{B}$ ainsi que des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Preuve.

□

5.2 Familles finies d'événements indépendants

Définition 21

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé (Ω, P). On dit que ces événements sont :

- **mutuellement indépendants** ou **indépendants** si et seulement si pour tout sous-ensemble I de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

- **indépendants deux à deux** si et seulement si pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Remarque :

- Si $n = 2$, ces deux notions coïncident avec l'indépendance.
- Si $n = 3$, A_1, A_2, A_3 mutuellement indépendants signifie que :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3),\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) \text{ et } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

  Alors que A_1, A_2, A_3 deux à deux indépendants signifie que :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),\ P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3),\ P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3).$$

- L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux (on prend successivement pour I tous les ensembles à 2 éléments de $[\![1, n]\!]$) mais la réciproque est fausse si $n \geq 3$.

➪ **Exemple 12 :**
On lance deux fois de suite un dé à 6 faces équilibré. On définit les événements :

A :"le premier lancer donne un chiffre pair"
B :"le deuxième lancer donne un chiffre impair"
C :"l'un des lancer donne un chiffre pair, l'autre un chiffre impair"

1. Montrer que les événements A et B sont indépendants, que les événements A et C sont indépendants et que les événements B et C sont indépendants.
2. Les événements A,B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

Proposition 15

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement (resp. deux à deux) indépendants.

VI Variables aléatoires indépendantes

6.1 Couples de variables aléatoires indépendantes

Définition 22

Soit X, Y deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)),\ P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B),$$

c'est-à-dire, pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Proposition 16

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω.
X et Y sont indépendantes ssi :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y).$$

Remarque : Dans le cas particulier de variables aléatoires indépendantes, la lois conjointe est déterminée par les lois marginales.

Preuve.

□

6.2 n-uplets de variables aléatoires indépendantes

Définition 23

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites mutuellement indépendantes ou indépendantes ssi :

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega)),\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i).$$

Remarque :

- Si on effectue n fois une expérience aléatoire de manière indépendante, si X_i est le résultat de la i-ème expérience, alors les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
- Comme dans le cas des événements, si les $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, elles ne sont pas nécessairement indépendantes.

Proposition 17

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires.
$X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),\ P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

Proposition 18

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre $p \in [0,1]$. Alors :

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 13 :**
N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n, avec $n \geq 2$.
Soit X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i.
Déterminer la loi de X_i.
Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes ?

6.3 Image de variables aléatoires indépendantes

Proposition 19

Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires indépendantes, f et g deux fonctions définies respectivement sur E et F. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Preuve.

□

Proposition 20 : lemme des coalitions

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, soient f et g des fonctions.
Si $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque :

- La démonstration de ce résultat n'est pas au programme.
- Les variables aléatoires ont été rassemblées en 2 camps pour former une coalition de deux variables aléatoires qui restent indépendantes.

Proposition 21 : généralisation du lemme des coalitions

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires, soit $(I_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ une partition de $[\![1,n]\!]$, soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions.
Si $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes alors $f_1\left((X_k)_{k \in I_1}\right), \ldots, f_p\left((X_k)_{k \in I_p}\right)$ sont indépendantes.