

# Chapitre 23 : Espérance et variance

Dans tout ce chapitre  $(\Omega, P)$  est un espace probabilisé fini et les variables aléatoires sont à valeurs réelles ou complexes.

## I Espérance

### 1.1 Définition

#### Définition 1

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ , on appelle espérance de  $X$  et on note  $E(X)$  le nombre

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

On dit que la variable aléatoire  $X$  est centrée ssi  $E(X) = 0$ .

#### Remarque :

- L'espérance est la moyenne des valeurs prises par  $X$ , chacune étant pondérée par sa probabilité. Il s'agit d'un indicateur de position.
- L'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de sa loi : deux variables aléatoires réelles de même loi ont même espérance.
- Si  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ , alors  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ .

#### Proposition 1

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$ , son espérance est donnée par :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

*Preuve.*

□

⇒ **Exemple 1 :** On considère un dé truqué qui donne le résultat 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et tous les autres résultats de façon équiprobable. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le résultat obtenu. Déterminer  $E(X)$ .

## 1.2 Propriétés de l'espérance

### Proposition 2 : Linéarité

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Alors :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

*Preuve.*

□

### Proposition 3 : Positivité

Soit  $X$  une variable aléatoire positive. Alors :

$$E(X) \geq 0.$$

*Preuve.*

□

### Proposition 4 : Croissance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles telles que  $X \leq Y$ . Alors :

$$E(X) \leq E(Y).$$

*Preuve.*

□

### Proposition 5 : Inégalité triangulaire

Soit  $X$  une variable aléatoire. On a :

$$|E(X)| \leq E(|X|).$$

*Preuve.*

□

### 1.3 Cas particuliers

#### Proposition 6

Soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $X$  la variable constante égale à  $a$ . Alors :

$$E(X) = a$$

*Preuve.*

□

#### Proposition 7

Si  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ , alors :

$$E(X) = p$$

*Preuve.*

□

#### Proposition 8

Si  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ , on a :

$$E(X) = np$$

*Preuve.*

□

#### Proposition 9

Si  $X$  suit la loi uniforme sur  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , on a :

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

En particulier, si  $X$  suit la loi uniforme sur  $[[1, n]]$ , on a :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Preuve.

□

⇨ **Exemple 2 :** Une personne écrit à une autre pendant un an (365 jours) selon la règle suivante :

- le jour de l'an, il écrit de façon certaine,
- s'il a écrit le jour  $i$ , il écrira le jour suivant avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ ,
- s'il n'a pas écrit le jour  $i$ , il écrira le jour suivant de façon certaine.

Soit  $X_i$  la variable aléatoire valant 1 si une lettre a été écrite le jour  $i$  et 0 sinon.

1. Exprimer  $P(X_{i+1} = 1)$  en fonction de  $P(X_i = 1)$ .
2. En déduire la loi de  $X_i$  pour  $i \in \llbracket 1, 365 \rrbracket$ .
3. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de lettres écrites dans l'année. Déterminer l'espérance de  $X$ .

## 1.4 Formule de transfert

### Théorème 1 : Formule de transfert

Soit  $X : \Omega \rightarrow E$  une variable aléatoire (non nécessairement à valeurs réelles ou complexes) et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
Alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

Preuve.

□

### Remarque :

- Pour déterminer l'espérance de  $f(X)$ , il n'est pas nécessaire de connaître la loi de  $f(X)$ , il suffit de connaître la loi de  $X$ .
- Ce résultat s'applique également aux couples de variables aléatoires :

$$E(f(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y)P((X = x) \cap (Y = y)).$$

- Il se généralise également aux  $n$ -uplets de variables aléatoires.

⇨ **Exemple 3 :** On considère un dé truqué qui donne le résultat 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  et tous les autres résultats de façon équiprobable. On note  $X$  la variable aléatoire donnant le résultat obtenu. Déterminer  $E(X^2)$ .

## 1.5 Indépendance

### Proposition 10

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires.  
Si  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes**, alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

*Preuve.*

□

**Remarque :** La réciproque est fautive en général. On va voir un contre-exemple.

⇔ **Exemple 4 :** Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$ .

Posons :  $X = 2U + V$  et  $Y = \frac{1}{2}U - V$ .

Montrons que  $E(XY) = E(X)E(Y)$  et que  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

## II Variance, écart type et covariance

### 2.1 Définitions

#### Définition 2

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On appelle variance de  $X$  et on note  $V(X)$  le réel défini par

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

On appelle écart-type de  $X$  le réel noté  $\sigma(X)$  défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

On dit que  $X$  est réduite ssi :  $V(X) = 1$ .

**Remarque :**

- L'écart type est bien défini car  $(X - E(X))^2 \geq 0$  donc par positivité de l'espérance, on a  $V(X) \geq 0$ .
- La variance représente la moyenne de  $(X - E(X))^2$ , il s'agit donc d'un indicateur de dispersion de  $X$  par rapport à sa valeur moyenne  $E(X)$ .
- D'après le théorème du transfert, on a :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P(X = x).$$

### 2.2 Propriétés de la variance

#### Proposition 11 : Formule de Koenig Huygens

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Preuve.

□

⇨ **Exemple 5 :**

Un joueur lance un dé, il gagne 2 euros s'il obtient 6, 1 euro s'il obtient 5. Par contre, il perd 1 euro si le résultat est 2. Il ne gagne rien dans tous les autres cas. Soit  $X$  le gain du joueur. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Lemme 1**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Preuve.

□

⇨ **Exemple 6 :** Soit  $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ . Calculer  $V(X)$ .

**Proposition 12**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Preuve.

□

**Corollaire 1**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle telle que  $\sigma(X) > 0$ . La variable aléatoire :  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est centrée réduite.

Preuve.

□

**Proposition 13**

Si  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ , alors :

$$V(X) = p(1 - p)$$

*Preuve.*

□

### 2.3 Covariance de deux variables aléatoires

**Définition 3**

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires réelles. On appelle covariance de  $X$  et  $Y$  et on note  $\text{cov}(X, Y)$  le réel défini par

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

On dit que  $X$  et  $Y$  sont décorrélées ssi :  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

**Remarque :** On a :  $\text{cov}(X, X) = V(X)$ .

**Proposition 14**

Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires réelles. On a :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

*Preuve.*

□

**Corollaire 2**

Deux variables aléatoires indépendantes sont décorrélées, autrement dit : soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes, on a :

$$\text{cov}(X, Y) = 0.$$

⇔ **Exemple 7 :** Soient  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$  avec  $p \in ]0, 1[$ . On pose :  $U = X + Y$  et  $V = X - Y$ . Déterminer la covariance de  $U$  et  $V$ . Les variables  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?

### 2.4 Variance d'une somme

**Proposition 15**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y).$$

Preuve.

□

### Corollaire 3

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires **indépendantes**, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Preuve.

□

### Proposition 16

Si  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ , on a :

$$V(X) = np(1 - p)$$

Preuve.

□

⇒ **Exemple 8** : A un péage autoroutier  $n$  voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note  $X_1$  (resp.  $X_2, X_3$ ) les variables aléatoires donnant le nombre de voitures ayant franchi la barrière 1 (resp. 2, 3).

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .
2. Calculer les variances de  $X_1, X_2$  et de  $X_1 + X_2$ .
3. En déduire la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ .

## III Inégalités probabilistes

### Proposition 17 : Inégalité de Markov

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et soit  $a > 0$ . Alors

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}.$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 9 :** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[[0, n]]$ . Montrer que, pour tout  $c \in ]1, n[$  :

$$\frac{E(X) - c}{n - c} \leq P(X \geq c) \leq \frac{E(X) - 1}{c - 1}.$$

**Proposition 18 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et soit  $a > 0$ . Alors

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 10 :** On souhaite estimer l'équilibre d'une pièce. On note  $p$  la probabilité (inconnue) que la pièce tombe sur pile. On lance  $n$  fois la pièce et on note  $S_n$  le nombre de lancers ayant donné pile.

A partir de combien de lancers peut-on supposer que  $\frac{S_n}{n}$  est une approximation de  $p$  à 0.01 près avec une probabilité supérieure à 95% ?

⇔ **Exemple 11 :** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $X_n$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$