Chapitre 24 : Déterminants

Dans tout le chapitre n désignera un entier naturel non nul, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension** n et $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1.1 Définition

Définition 1

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$. On dit que :

1. f est linéaire par rapport à la i-ème variable, $i \in [\![1, n]\!]$ ssi, pour tous $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ les applications :
$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array}$$
sont linéaires,
2. f est linéaire par rapport à chaque variable ssi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f est linéaire par rapport à la i-ème variable,
3. f est alternée ssi : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a :
$$x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Proposition 1

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable et alternée, alors f est antisymétrique, c'est-à-dire : pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a :
$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n),$$
(on a échangé les i-ème et j-ème variables).

Preuve.

□

Théorème 1

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Il existe une unique application, notée $\det_{\mathcal{B}}$ et appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$, de E^n dans $\mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable, alternée vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Remarque :

- Ce résultat sera admis dans le cas général mais une preuve sera faîte dans le cas particulier $n = 2$ (Proposition 4).
- La proposition précédente montre que le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est antisymétrique.

Notation : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$, soient $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$: $x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$.
On note :

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque : Cette notation est abusive car le déterminant dépend de la base $\mathcal{B}$ mais elle permet d'avoir dès maintenant une vision matricielle du déterminant.

Proposition 2

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Preuve.

□

Proposition 3

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une application linéaire par rapport à chaque variable et alternée.
Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f = \lambda \det{}_{\mathcal{B}}.$$

Preuve.

□

1.2 Cas particulier des dimensions 2 et 3

Proposition 4

Si $\dim(E) = 2$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, soient $x_1, x_2 \in E$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{B}$ (a, b) et (c, d). On a :

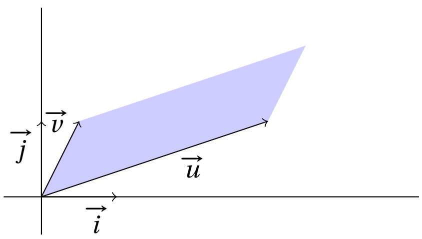
$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Preuve.

□

Interprétation géométrique

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique que l'on note $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathcal{P}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}$ le parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:



On note $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ l'aire algébrique de $\mathcal{P}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}$ c'est à dire que l'aire de $\mathcal{P}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}$ est comptée :

- positivement si l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est décrit dans le sens trigonométrique.
- négativement sinon.

Alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ est linéaire par rapport à chaque variable, alternée et $\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}}) = 1$ donc :

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \det{}_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Proposition 5

Si $\dim(E) = 3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, soient $(X, Y, Z) \in E^3$ de coordonnées respectives dans $\mathcal{B}$: $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)$. On a :

$$\det{}_{\mathcal{B}}(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3$$

Preuve.

$\square$

Remarque :

- Cette preuve est l'analyse du raisonnement par analyse-synthèse qui permettrait de prouver le théorème 1 dans le cas particulier $n = 3$.
- La formule en dimension 3 se retrouve par la **règle de Sarrus** :

$$\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{array}$$

  - On a recopié sous le déterminant, les deux premières lignes de la matrice.
  - On fait le produit des termes de chaque diagonale (représentée par un trait plein) en attribuant à chaque terme un signe +.
  - On fait le produit des termes de chaque anti-diagonale (représentée par un trait en pointillés) en attribuant à chaque terme un signe -.
  - La somme de ces termes donne le déterminant de la matrice.

- La règle de Sarrus n'est valable que pour les matrices de taille 3, il ne faut surtout pas la généraliser !

➪ **Exemple 1 :** Calculer $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, et $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Interprétation géométrique

Dans la base canonique de l'espace, le déterminant d'un triplet de vecteurs est égal au volume orienté du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

1.3 Déterminant et bases

Proposition 6

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors :

$$\det{}_{\mathcal{B}'} = \det{}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det{}_{\mathcal{B}}.$$

Preuve.

□

Proposition 7

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi :

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 2 :** Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $x_1 = (t, 3, -1)$, $x_2 = (1, -1, t)$ et $x_3 = (1, t, -1)$.
Pour quelles valeurs de t, (x_1, x_2, x_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$?

II Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \det{}_{\mathcal{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \lambda \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Remarque : Il faut bien remarquer que la constante ne dépend pas de la base.

Preuve.

□

Définition 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle déterminant de f et on note $\det(f)$ le nombre tel que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det{}_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n),$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Proposition 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On a :

$$\det(f) = \det{}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Preuve.

□

Proposition 9

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(Id_E) = 1$,
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$, où $n = \dim E$.

Remarque : On a $\det(\lambda Id_E) = \lambda^n$ et donc $\det(-Id_E) = (-1)^n$.

Preuve.

□

Proposition 10

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

$$\det(f \circ g) = \det(f).\det(g).$$

Preuve.

□

Proposition 11

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$f \in GL(E) \Longleftrightarrow \det(f) \neq 0.$$

De plus, dans ce cas : $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 3 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \mapsto & (X^2+1)P'' - 3XP' + aP. \end{array}$.
Pour quelles valeurs de a, u est-elle bijective ?

➪ **Exemple 4 :** Soit $\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$.
Calculer $\det(u)$.

III Déterminant d'une matrice carrée

3.1 Définition

Définition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \det{}_{\mathcal{B}}(C_1, \ldots, C_n).$$

Proposition 12

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}^n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (C_1, \ldots, C_n) & \mapsto & \det(C_1|\ldots|C_n) \end{array}, \text{où } (C_1|\ldots|C_n) \text{ désigne la matrice de colonnes } (C_1, \ldots, C_n),$$

est linéaire par rapport à chaque variable et alternée.

Preuve.

□

Proposition 13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On a :

$$\det(A) = \det(u).$$

Preuve.

□

3.2 Propriétés du déterminant

Proposition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carré.

1. Si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.
2. Si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Preuve.

□

Proposition 15

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\det(AB) = \det(A).\det(B).$$

Preuve.

□

Remarque : En général, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. Le déterminant n'est pas linéaire mais linéaire par rapport à chaque variable.

Corollaire 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\det(A^p) = \det(A)^p.$$

➪ **Exemple 5 :** Soit n impair et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A + I_n = 0$. Déterminer A^3 et en déduire $\det(A)$.

Proposition 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

De plus, dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Preuve.

□

Corollaire 2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

Preuve.

□

Remarque : Ce résultat peut également être vu comme l'indépendance du déterminant d'un endomorphisme par rapport à la base choisie. En effet, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, posons $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P$ et $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)) = \det(u) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ donc $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P)$.

Proposition 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Remarque : La preuve de ce résultat n'est pas au programme. Il est admis.

Corollaire 3

Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis à vis des lignes que des colonnes :

- det est linéaire par rapport à chacune des lignes de sa variable,
- det est antisymétrique par rapport aux lignes de sa variable.
- si A à une ligne nulle ou deux lignes égales, $\det(A) = 0$.

IV Calcul des déterminants

4.1 Opérations élémentaires

Proposition 18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A en faisant :

- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ (resp. $L_i \leftarrow \lambda L_i$) avec $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors :
$$\det(B) = \lambda \det(A),$$
- $C_i \leftrightarrow C_j$ (resp. $L_i \leftrightarrow L_j$) avec $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et $i \neq j$. Alors :
$$\det(B) = -\det(A),$$
- $C_j \leftarrow C_j + \mu C_i$ (resp. $L_j \leftarrow L_j + \mu L_i$), avec $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors :
$$\det(B) = \det(A).$$

Preuve.

□

4.2 Développement par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne

Proposition 19

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on pose $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans M la ligne i et la colonne j. On peut calculer le déterminant de M :

- en développant suivant la j-ème colonne :
$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(A_{i,j}).$$
- en développant suivant la i-ème ligne :
$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

Preuve. Cette preuve est hors programme !

Lemme 1

Soit $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors $\begin{vmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & N \end{vmatrix} = \det(N)$.

Preuve. Soit $g : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ N \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & N \end{vmatrix}$. Comme le déterminant est linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable, il en est de même pour g. De plus $g(I_{n-1}) = 1$. Par unicité d'une telle application, g est le déterminant de taille $n-1$. Ainsi $g(N) = \det(N)$. □

Faisons la preuve du développement suivant la i-ème ligne.
Notons $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On commence par développer par linéarité par rapport à la i-ème ligne :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} & m_{1,j} & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j} & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j} & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j-1} & m_{n,k} & m_{n,k+1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}$$

On ramène la i-ème ligne en première position, sans changer l'ordre des autres, en effectuant $L_k \leftrightarrow L_{k-1}$ pour k allant de i à 2 (dans cet ordre). Cela fait $i-1$ échanges, donc le déterminant est multiplié par $(-1)^{i-1}$:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} & m_{1,j} & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j} & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,n} \\ m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j} & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,j-1} & m_{n,j} & m_{n,j+1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on ramène la j-ème colonne en première position, sans changer l'ordre des autres, en effectuant $C_k \leftrightarrow C_{k-1}$ pour k allant de j à 2 (dans cet ordre). Cela fait $j-1$ échanges, donc le déterminant est multiplié par $(-1)^{j-1}$:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{1,j} & m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{i-1,j} & m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,n} \\ m_{i+1,j} & m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,j} & m_{n,1} & \dots & m_{n,j-1} & m_{n,j+1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Notons $N_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne.
On effectue enfin les opérations élémentaires nécessaires pour éliminer tous les coefficients sous le 1 de la première colonne : $L_k \leftarrow L_k - m_{k,j}L_1$ pour $k \in [\![i+1,n]\!]$ et $L_k \leftarrow L_k - m_{k-1,j}L_1$ pour $k \in [\![2,i]\!]$ (ce qui ne change pas le déterminant).
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & N_{i,j} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j} \det(N_{i,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}. \end{aligned}$$

La formule de développement suivant une colonne se montre de même.

□

Remarque : Cette formule permet d'exprimer un déterminant de taille n en fonction de n déterminants de taille $n-1$. Elle a donc deux applications :

- obtenir une formule de récurrence pour calculer un déterminant de taille n,
- calculer un déterminant de petite taille en appliquant la formule jusqu'à se ramener à un déterminant de taille 3 que l'on calcule grâce à la règle de Sarrus.
- Plus il y a de termes $m_{i,j}$ nuls, moins il y a de termes à calculer dans la somme. On préfère donc de développer par rapport à une ligne ou une colonne contenant le plus de zéros possible. Sinon, on fait d'abord des opérations élémentaires afin de faire apparaître des zéros puis on utilise le développement.
- En pratique, on applique cette formule en rayant des lignes et des colonne.
  Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ On va calculer D en effectuant un développement par rapport à la première colonne.
  - Le terme $(-1)^{i+j}$ correspond à une alternance de signe "en damier" :
    $$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$
    Les cases grises correspondent à un signe + (la première case a un signe +) et la cases blanches à un signe -.
  - On développe par rapport à la première colonne donc on encadre cette colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

– On raye ensuite la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On obtient le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

– Puis on raye la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On obtient le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

– Puis on raye la troisième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On obtient le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

– Enfin on raye la quatrième ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On obtient le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a :

$$D = 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-1-2-1)+1.(-1-1-2)-1.(-2-2-4) = 0.$$

(Les déterminants de taille 3 ont été calculés en utilisant la règle de Sarrus.)

➪ **Exemple 6 :** Soit $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Calculer D en effectuant un développement par rapport à la deuxième ligne.

➪ **Exemple 7 :** Soit $\theta \in [0,\pi]$, soit, pour tout $n \in N^*$, d_n le déterminant de taille n :

$$d_n = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

1. Exprimer d_{n+2} en fonction de d_{n+1} et d_n.
2. En déduire d_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

➪ **Exemple 8 :** Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde.

Corollaire 4

Soit $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors :

$$\det(T) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Autrement dit :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Remarque : On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire est inversible ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Preuve.

□