Chapitre 25 : Espaces préhilbertiens réels

Dans tout le chapitre, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I Produit scalaire

Définition 1

- On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
  - φ est bilinéaire :

    $\forall x \in E,\ \varphi(x, \cdot)$ est linéaire c'est-à-dire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall y, y',\ \varphi(x, \lambda y + \mu y') = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, y')$.
    $\forall y \in E,\ \varphi(\cdot, y)$ est linéaire c'est-à-dire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, x',\ \varphi(\lambda x + \mu x', y) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x', y)$,
  - φ est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,
  - φ est positive : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$,
  - φ est définie : $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.
- Si φ est un produit scalaire sur E et si $(x, y) \in E^2$, le réel $\varphi(x, y)$ est appelé produit scalaire de x et y et est noté $< x, y >$, $(x|y)$ ou $x.y$.

Proposition 1 : Exemples de référence

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in E$, on pose :

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

  $<,>$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique.
- Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b])$ (avec $a < b \in \mathbb{R}$). Pour tout f et $g \in E$, on pose :

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

  $<\ ,\ >$ définit un produit scalaire sur E souvent appelé produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}^0([a, b])$.
- Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour tout A et $B \in E$, on pose :

$$< A, B >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{i,j}.$$

  $<\ ,\ >$ définit un produit scalaire sur E souvent appelé produit scalaire usuel sur E.

Preuve. □

Remarque : Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: soient $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Posons : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a :

$$< x, y >= X^T.Y.$$

➪ **Exemple 1 :**

1. On pose :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([-1, 1]), < f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\,dt.$$

   Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1, 1])$.
2. On pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], < P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

   Montrer que $<,>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Définition 2

- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ est appelé espace préhilbertien réel, et noté $(E, < \cdot, \cdot >)$.
- On appelle espace euclidien, tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Dans toute la suite, on considère $(E, < \ , \ >)$ un espace préhilbertien réel.

II Norme associée à un produit scalaire

2.1 Définition et propriétés

Définition 3

- Pour tout $x \in E$, on appelle norme de x et on note $\|x\|$ le réel positif défini par $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.
- On appelle norme associée au produit scalaire $< \ , \ >$ l'application :

$$\begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{< x, x >}. \end{array}$$

- On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **unitaire** si et seulement si $||x|| = 1$.
- Soient $x, y \in E$, on appelle distance entre x et y et on note $d(x, y)$ le réel :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dans toute la suite, on notera $\| \ \|$ la norme associé à ce produit scalaire.

Remarque :

- Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique : pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$
- Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini précédemment pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b, \mathbb{R})$, on a $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$.

Proposition 2

La norme $\| \ \|$ associée au produit scalaire $< \ , \ >$ vérifie :

- $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Preuve. □

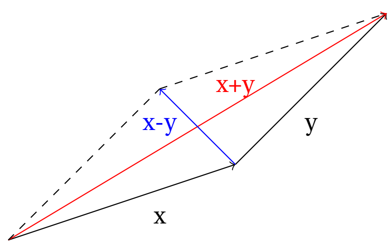
Proposition 3

Soient $x, y \in E$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

- $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu < x, y > + \mu^2 \|y\|^2$.
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$.
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2$.
- Identité du parallélogramme : $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Preuve. □

Remarque : L'égalité du parallélogramme traduit le fait que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.



Corollaire 1 : Identités de polarisation

Soient $x, y \in E$, on a :

$$< x, y >= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

$$< x, y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Preuve. □

➪ **Exemple 2 :** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|.$$

Montrer que :

$$\forall x, y \in E, (f(x)|f(y)) = (g(x)|g(y)).$$

2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

On a :

$$\forall x, y \in E, |< x, y >| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si, et seulement si, (x, y) est liée.

Preuve. □

Remarque :

- dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

- dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], R)$ muni du produit scalaire usuel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b]), \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

➪ **Exemple 3 :** Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 c_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 c_k \right).$$

➪ **Exemple 4 :** Soient $0 < a < b$, montrer que :

$$\ln b - \ln a \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

➪ **Exemple 5 :**

Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x + 2y + 3z = 1\}$. Déterminer :

$$\min_{(x,y,z) \in A} (x^2 + y^2 + z^2).$$

Proposition 5 : Inégalité triangulaire ou inégalité de Minkowski

On a :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $y = 0$ ou $\Big($il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y\Big)$.

Preuve. □

Corollaire 2

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

Corollaire 3 : Deuxième inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Preuve. □

III Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale

Définition 4

On dit que deux vecteurs x et $y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $< x, y >= 0$.

Définition 5

On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est :

- orthogonale si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $< e_i, e_j >= 0$.
- orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si cette famille est orthogonale et que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|e_i\| = 1$ (vecteurs unitaires), c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], < e_i, e_j >= \delta_{i,j}.$$

3.2 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale de E. Alors

$$\| \sum_{i=1}^{n} e_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2.$$

Remarque : Le cas particulier $n = 2$ correspond à la version classique du théorème de Pythagore. On considère en effet (e_1, e_2) une famille orthogonale, ainsi le triangle de côtes construits sur e_1 et e_2 est rectangle. On a alors : $\|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$ avec $\|e_1 + e_2\|$ qui est la longueur de l'hypoténuse et $\|e_1\|$ et $\|e_2\|$ qui sont les longueurs des deux autres côtes.

Preuve. □

Proposition 6

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve. □

3.3 Orthogonal d'une partie

Définition 6

Soit A une partie de E.
On appelle orthogonal de A, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de A. Il est noté $A^\perp$.

$$A^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in A,\ <x, y>= 0\}$$

Soit $x \in E$, on a :

$$x \in A^\perp \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in A,\ <x, y>= 0$$

Proposition 7

Soit A une partie de E. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. □

Proposition 8

Soit $e_1, ..., e_n \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$. Soient $x \in E$. On a :

$$F^\perp = \{x \in E, \forall i \in [\![1, n]\!], <x, e_i>= 0\}.$$

Preuve. □

➪ **Exemple 6 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et soit $F = \{(x, y, z) \in E,\ x + y - z = 0\}$.
Déterminer $F^\perp$.

Proposition 9

Soient A et B des parties de E.

- Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \subset A^{\perp\perp}$.
- $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.
- $A \cap A^\perp \subset \{0\}$.

Remarque : Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors A et $A^\perp$ sont en somme directe.

Preuve. □

➪ **Exemple 7 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in E, <P, Q>= \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \setminus \{0\}$.
Calculer le degré de P.

➪ **Exemple 8 :**
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1])$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E, <f, g>= \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Soient F l'ensemble des fonctions paires de E et G l'ensemble des fonctions impaires de E. Montrer que :

$$F = G^\perp.$$

➪ **Exemple 9 :**
Soit $(E, <.,.>)$ un espace euclidien. On pose, pour tout $a \in E$:

$$f_a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & <x, a> \end{array} \quad \text{et} \quad \Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & f_a. \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.
2. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = <x, a> .$$

3.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 2 : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille libre de vecteurs de E.
Il existe un unique famille $(f_1,\ldots,f_n)$ telle que :

- $(f_1,...,f_n)$ est orthonormée
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_i) = \mathrm{Vect}\,(f_1,\ldots,f_i)$
- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $<e_i, f_i>> 0$.

De plus, on a ;

- $f_1 = \dfrac{e_1}{||e_1||}$
- Posons : $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $g_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} <e_k, f_i> f_i$, alors :

$$\forall k \in [\![2,n]\!],\ f_k = \frac{g_k}{||g_k||}.$$

Preuve. □

➪ **Exemple 10 :** Orthonormaliser la famille $((1,1,1),(1,0,-1),(-1,2,3))$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

➪ **Exemple 11 :** Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall P,Q \in E, <P,Q>= \int_0^1 tP(t)Q(t)\,dt.$$

Orthonormaliser la base canonique de E.

IV Bases orthonormées d'un espace euclidien

4.1 Existence

Définition 7

Soit E un espace euclidien. On appelle base orthonormée (ou base orthonormale) de E toute base de E qui est une famille orthonormée.

Proposition 10

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Toute famille orthonormée de E à n éléments est une base orthonormée de E.

Preuve. □

Théorème 3

Tout espace euclidien non réduit à $\{0\}$ possède une base orthonormée.

Preuve. □

Remarque : Pour construire une base orthonormée, il suffit d'orthonormaliser une base quelconque de E.

4.2 Formules dans une base orthonormée

Proposition 11

Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.

- $\forall x\in E,\ x=\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>e_k$.
- Soit $x=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k$ et $y=\sum_{k=1}^{n}y_ke_k\in E$. On a alors :

$$<x,y>=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k=\sum_{k=1}^{n}<x,e_k><y,e_k>\quad \text{et}\quad \|x\|^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>^2$$

En posant $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, on a :

$$<x,y>=X^TY\quad \text{et}\quad \|x\|^2=X^TX$$

en identifiant les matrices de taille 1×1 à leur unique coefficient.

Preuve. □

Corollaire 4

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E et $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de $u\in\mathcal{L}(E)$ en base $\mathcal{B}$. Alors pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}=<u(e_j),e_i>$.

Preuve. □

Corollaire 5

Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E, $\mathcal{C}=(f_1,\dots,f_n)$ une base orthonormée de E. Posons $P=Pass(\mathcal{B},\mathcal{C})$. Alors :

$$P^{-1}=P^T.$$

Preuve. □

4.3 Base incomplète

Théorème 4 : Théorème de la base orthonormée incomplète

Soit $(E,<\cdot,\cdot>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $p\in[\![1,n]\!]$.
Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille orthonormale de E.
Alors, il existe $e_{p+1},\dots,e_n\in E$ tels que $(e_1,\dots,e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Preuve. □

V Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

5.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 12

Soit $(E,<,>)$ un préhilbertien réel.
Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires, c'est-à-dire :

$$F\oplus F^\perp=E.$$

Preuve. □

Définition 8

Soit $(E,<,>)$ un préhilbertien réel.
Soit F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
Le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Corollaire 6

Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien . Soit F un sous-espace vectoriel de E.

$$\dim(F^{\perp}) + \dim(F) = \dim(E).$$

Preuve. □

Proposition 13

Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

$$F^{\perp\perp} = F.$$

Preuve. □

Définition 9

Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien. Soit F un hyperplan de E. On a $\dim(F^{\perp}) = 1$. On appelle vecteur normal à F tout vecteur non nul de $F^{\perp}$.

➪ **Exemple 12 :** Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E, < x, f(x) >= 0$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

5.2 Projection orthogonale

Définition 10

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$, notée p_F.
Soit $x \in E$. $p_F(x)$ est appelé projeté orthogonal de x sur F.

Remarque :

- Comme F et $F^{\perp}$ sont supplémentaire, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est bien définie. Et on a :
- $p_F \circ p_F = p_F$,
- $\ker p_F = F^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\, p_F = F$,
- $\forall x \in F,\ p_F(x) = x$,
- $\forall x \in F^{\perp},\ p_F(x) = 0$.

Proposition 14

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F.

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$$

Preuve. □

Théorème 5 : Inégalité de Bessel

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $x \in E$ et notons $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Alors :

$$\|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

Preuve. □

Méthode 1

Pour déterminer l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur un sous espace vectoriel F de E, on peut utiliser une des deux méthodes suivantes :

- Soit on détermine une base orthonormée de F et on utilise la formule de la proposition précédente.
- Si $(e_1,...,e_p)$ est une famille génératrice de F. Pour déterminer $y = p_F(x)$, il suffit de se donner $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et, comme $x - y \in F^\perp$, de résoudre le système linéaire d'inconnues $\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R}$:

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\, 0 = < x - y, e_k > = < x - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, e_k > .$$

Cela évite de déterminer une base orthonormée de F.

➪ **Exemple 13 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et soit $F = \{(x,y,z) \in E,\, x + y - z = 0\}$.
Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur F.

5.3 Distances

Définition 11

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $a \in E$. On appelle distance de a à F la quantité :

$$d(a,F) = \inf_{x\in F} \|a - x\|$$

Remarque :

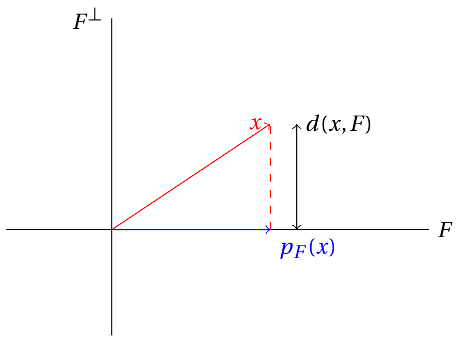
- L'existence de $d(a,F)$ vient du fait que $\{\|a - x\|, x \in F\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car F est non vide car espace vectoriel) et minorée par 0 donc la borne inférieure existe.
- Si $a \in F$, alors $d(a,F) = 0$.

Proposition 15

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E de dimension finie. Soit $a \in E$.
Il existe un unique élément $x_0 \in F$ tel que : $\|a - x_0\| = \inf_{x\in F} \|a - x\| = d(a,F)$. Il s'agit donc d'un minimum.
Cet unique vecteur $x_0 \in F$ est $p_F(a)$ le projeté orthogonal de a sur F. En particulier :

$$d(a,F) = \|a - p_F(a)\|.$$

Remarque : Si E est euclidien alors : $d(a,F) = \|p_{F^\perp}(a)\|$.



Preuve. □

Remarque : Cette proposition permet de minimiser des quantités, si on peut les interpréter comme la distance entre deux vecteurs pour une certaine norme.

➪ **Exemple 14 :** Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient $x = (1,2,3)$ et $F = \{(x,y,z) \in E,\, x + 2y - z = 0\}$. Calculer $d(x,F)$.

➪ **Exemple 15 :** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient $a_0,\ldots,a_n$ des réels distincts. On pose :

$$\forall P,Q \in E,\, (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Soit $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$. Déterminer $F^{\perp}$.
4. Soit $Q \in E$, calculer $d(Q, F)$.