# Chapitre 27 : Fonctions de deux variables

Dans tout ce chapitre $<.,.>$ désigne le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^2$ et $\|.\|$ la norme qui lui est associée.

## I Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

### 1.1 Ouverts

**Définition 1**

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $r > 0$.

- On appelle boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ et on note $B(a,r)$ l'ensemble :

$$B(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\}.$$

- On appelle boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$ et on note $B'(a,r)$ l'ensemble :

$$B'(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|(x,y) - (a_1,a_2)\| \leq r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq r^2\}.$$

**Définition 2**

Soit $\Omega$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\Omega$ est ouvert ssi :

$$\forall a \in \Omega, \exists r > 0, B(a,r) \subset \Omega.$$

**Remarque :** $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

**Proposition 1**

Toute boule ouverte est un ouvert.

*Preuve.*

□

### 1.2 Limite

**Définition 3**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$.
On dit que $f$ tend vers $l$ en $a$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors :

$$l = \lim_{u \to a} f(u) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y).$$

**Remarque :** Cette définition est analogue à celle vue pour les fonctions d'une variable réelle. On admet ici l'unicité de la limite. Les résultats d'opérations restent vrais.

➪ **Exemple 1 :** Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions $f$ suivantes :

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$,
2. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

## 1.3 Continuité

**Définition 4**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$.

- Soit $a \in \Omega$. On dit que $f$ est continue en $a$ ssi $f$ admet $f(a)$ pour limite en $a$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u-a\| \leq r \Rightarrow |f(u)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

- On dit que $f$ est continue sur $\Omega$ ssi $f$ est continue en tout point de $\Omega$.
- On note $\mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\Omega$.

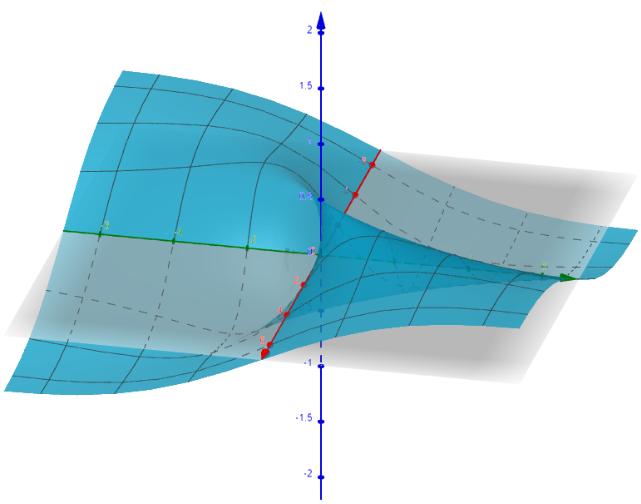
**Remarque :** Cette définition est analogue à celle vue pour les fonctions d'une variable réelle. Les résultats d'opérations restent donc vrais.

**Définition 5**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$. Soit $a = (x_0,y_0) \in \Omega$. Posons $D_{x_0} = \{y \in \mathbb{R}, (x_0,y) \in \Omega\}$ et $D_{y_0} = \{x \in \mathbb{R}, (x,y_0) \in \Omega\}$. On appelle respectivement première application partielle en $y_0$ et deuxième application partielle en $x_0$ les fonctions de la variable réelle :

$$f(.,y_0) : \begin{array}{ccc} D_{y_0} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y_0) \end{array} \quad \text{et} \quad f(x_0,.) : \begin{array}{ccc} D_{x_0} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x_0,y). \end{array}$$

**Remarque :** Les applications partielles donnent que des informations dans deux directions privilégiées. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$. Les applications partielles $f(0,.)$ et $f(.,0)$ sont nulles mais $f$ n'est pas nulle au voisinage de $(0,0)$. En effet, si $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$.



**Proposition 2**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Si $f$ est continue en $a$ alors ses applications partielles sont continues en $x_0$ et $y_0$.

*Preuve.*

$\square$

**Remarque :** La réciproque est fausse. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Les applications partielles $f(0,.)$ et $f(.,0)$ sont constantes nulles donc sont continues en 0. Mais $f$ n'est pas continue en $(0,0)$ car : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x, x) = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x) \neq f(0,0)$.

➪ **Exemple 2 :** Etudier la continuité en $(0,0)$ des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ :

1. $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$,

# II Dérivées partielles

## 2.1 Définition

**Définition 6**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$.

- On dit que $f$ est dérivable en $a$ par rapport à la première variable ssi $f(., y_0)$ est dérivable en $x_0$ et on note : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ cette dérivée :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$
- On dit que $f$ est dérivable en $a$ par rapport à la deuxième variable ssi $f(x_0,.)$ est dérivable en $y_0$ et on note : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ cette dérivée :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$
- Lorsqu'elles existent, on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les fonctions dérivées partielles.

**Remarque :**

- Dans les cas simples, le calcul de dérivées partielles se fait comme un calcul de dérivée. Par exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + xy + e^y$. On a :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + e^y.$$

- L'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la continuité. Par exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Comme $f(.,0)$ et $f(0,.)$ sont nulles, $f$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x,x) = 1$, $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

➪ **Exemple 3 :** Si elles existent, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

## 2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition 7**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$.On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ ssi ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\Omega$.
On note $\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$.

➪ **Exemple 4 :** Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$ ?

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

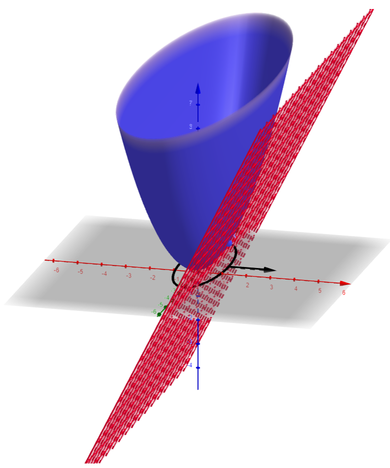
**Proposition 3 : Développement limité d'ordre 1**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|).$$

**Remarque :**

- La preuve est hors programme.
- Le développement limité d'ordre 1 montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$ est une approximation linéaire de $f(x_0 + h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$.
- On a :
$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\|(x-x_0, y-y_0)\|).$$
Donc, par analogie avec les fonctions d'une variable :
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$
est une équation du plan tangent en $(x_0,y_0)$ à la surface $z = f(x,y)$.



**Corollaire 1**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Toute fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ est continue sur $\Omega$.

### 2.3 Gradient

**Définition 8**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On appelle gradient de $f$ en $a = (x_0, y_0)$ et on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

**Proposition 4 : Développement limité d'ordre 1**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0), (h, k) > + o(\|(h, k)\|).$$

**Remarque :** Le gradient de $f$ en $(x_0, y_0)$ définit la direction dans laquelle $f$ croît le plus vite. En effet :

$$\frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)|}{\|(h, k)\|} = \frac{| < \nabla f(x_0, y_0), (h, k) > |}{\|(h, k)\|} + o(1)$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{| < \nabla f(x_0, y_0), (h, k) > |}{\|(h, k)\|} \leq \|\nabla f(x_0, y_0)\|,$$

avec égalité ssi $(h, k)$ est colinéaire à $\nabla f(x_0, y_0)$. Ainsi la pente maximale en valeur absolue est atteinte pour les vecteurs colinéaires au gradient.

# III Dérivées partielles et composées

### 3.1 Dérivée selon un vecteur

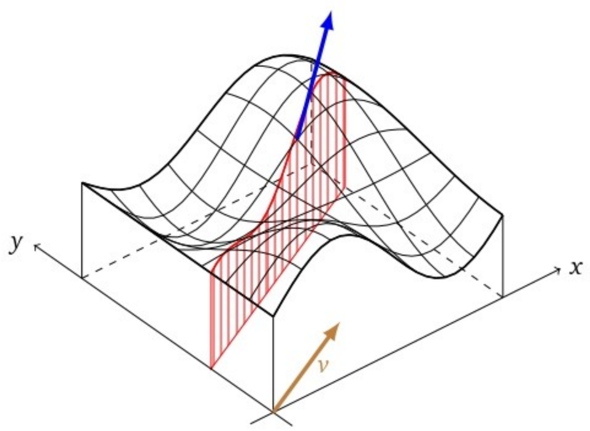
**Définition 9**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Soit $v$ un vecteur non nul, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On dit que $f$ est dérivable selon le vecteur $v$ ssi l'application $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, on appelle alors dérivée en $a$ selon le vecteur $v$ et on note $D_v f(a)$ cette dérivée :

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

**Remarque :**

- Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont les dérivées selon les vecteurs de la base canonique $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
- La dérivée selon un vecteur $v$ correspond à la pente de la tangente à la fonction dans la direction du vecteur $v$.



**Proposition 5**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$D_v f(a) = < \nabla f(a), v > .$$

*Preuve.*

□

## 3.2 Règle de la chaîne

**Proposition 6**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in I$, $((x(t), y(t)) \in \Omega$.
Posons :

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x(t), y(t)). \end{array}$$

Alors $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in I,\ g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

*Preuve.*

□

**Remarque :**

- On peut également noter :

$$\forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\big(f(x(t),y(t))\big) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).$$

- On considère un arc paramétré $\gamma : \gamma(t) = (x(t),y(t))$. On a :

$$(f\circ\gamma)'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) = <\nabla f(\gamma(t)),\gamma'(t)>.$$

  Cette formule représente la dérivée de $f$ selon l'arc $\gamma$.

- Soit $k\in\mathbb{R}$, la ligne de niveau $k$ est l'ensemble des points pour lesquels $f$ est constante égale à $k$. Si on considère que cette ligne de niveau est paramétré par un arc $\gamma$, on a :

$$\forall t\in I,\ f\circ\gamma(t) = k.$$

  Donc :

$$\forall t\in I,\ <\nabla f(\gamma(t)),\gamma'(t)> = (f\circ\gamma)'(t) = 0.$$

  Comme $\gamma'(t)$ dirige la tangente à l'arc $\gamma$, c'est-à-dire la tangente à la ligne de niveau, alors : le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction.

**Proposition 7**

Soit $\Omega_1$ et $\Omega_2$ des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\Omega_1,\mathbb{R})$. Soient $\varphi,\psi\in\mathcal{C}^1(\Omega_2,\mathbb{R})$ telles que : $\forall(u,v)\in\Omega_2$, $(\varphi(u,v),\psi(u,v))\in\Omega_1$.
Posons :

$$g:\begin{array}{ccc}\Omega_2 & \to & \mathbb{R}\\ (u,v) & \mapsto & f(\varphi(u,v),\psi(u,v)).\end{array}$$

Alors $g\in\mathcal{C}^1(\Omega_2,\mathbb{R})$ et :

$$\forall(u,v)\in\Omega_2,\quad \begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(u,v) &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) + \frac{\partial\psi}{\partial x}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\\ \frac{\partial g}{\partial y}(u,v) &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v)) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v)).\end{aligned}$$

➪ **Exemple 5 :** Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $(x,y)\mapsto f(y,x)$,
2. $(x,y)\mapsto f(x,x)$,
3. $(x,y)\mapsto xyf(xy,x^2)$,
4. $(x,y)\mapsto f(f(x,y),f(y,x))$.

➪ **Exemple 6 :** Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles de : $(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$.

➪ **Exemple 7 :** Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y.$$

On pourra poser $(u,v) = (x,x+2y)$.

# IV Extremums

**Définition 10**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. On dit que :

- $f$ admet un minimum global en $a$ ssi :
$$\forall u \in \Omega,\ f(a) \leq f(u),$$
- $f$ admet un maximum global en $a$ ssi :
$$\forall u \in \Omega,\ f(a) \geq f(u),$$
- $f$ admet un extremum global en $a$ ssi $f$ admet un minimum ou un maximum global en $a$,
- $f$ admet un minimum local en $a$ ssi :
$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a,r),\ f(a) \leq f(u),$$
- $f$ admet un maximum local en $a$ ssi :
$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a,r),\ f(a) \geq f(u),$$
- $f$ admet un extremum local en $a$ ssi $f$ admet un minimum ou un maximum local en $a$.

**Définition 11**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. On dit que $a$ est un point critique de $f$ ssi $f$ admet des dérivées partielles nulles en a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0,$$
c'est-à-dire :
$$\nabla f(a) = (0,0).$$

**Proposition 8**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a \in \Omega$.
Si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $a$ est un point critique de $f$.

**Remarque :** Comme pour les fonctions d'une variable, la réciproque est fausse. Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ admet un point critique en $(0,0)$ mais $(0,0)$ n'est pas un extremum local car : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x,x) = x^2 > f(0,0)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x,-x) = -x^2 < f(0,0)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}(x,x) = \lim\limits_{x\to 0}(x,-x) = (0,0)$.

*Preuve.*

□

➪ **Exemple 8 :** Etudier les extremums de :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-y)^2 + x^3 + y^3 \end{array}$,
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-y)^2 + x^4 + y^4 \end{array}$.
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\left((\ln x)^2 + y^2\right) \end{array}$.