

# Chapitre 27 : Fonctions de deux variables

Dans tout ce chapitre  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien canonique sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\|\cdot\|$  la norme qui lui est associée.

## I Ouverts de $\mathbb{R}^2$ , fonctions continues

### 1.1 Ouverts

#### Définition 1

Soit  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ , soit  $r > 0$ .

- On appelle boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  et on note  $B(a, r)$  l'ensemble :

$$B(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\}.$$

- On appelle boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  et on note  $B'(a, r)$  l'ensemble :

$$B'(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) - (a_1, a_2)\| \leq r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2\}.$$

#### Définition 2

Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $\Omega$  est ouvert ssi :

$$\forall a \in \Omega, \exists r > 0, B(a, r) \subset \Omega.$$

**Remarque :**  $\mathbb{R}^2$  est ouvert.

#### Proposition 1

Toute boule ouverte est un ouvert.

*Preuve.*

□

### 1.2 Limite

#### Définition 3

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . Soit  $l \in \mathbb{R}$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ .

On dit que  $f$  tend vers  $l$  en  $a$  ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - l| \leq \varepsilon.$$

On note alors :

$$l = \lim_{u \rightarrow a} f(u) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).$$

**Remarque :** Cette définition est analogue à celle vue pour les fonctions d'une variable réelle. On admet ici l'unicité de la limite. Les résultats d'opérations restent vrais.

⇔ **Exemple 1 :** Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en  $(0, 0)$  pour les fonctions  $f$  suivantes :

- $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ,
- $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ .

### 1.3 Continuité

#### Définition 4

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ .

- Soit  $a \in \Omega$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  ssi  $f$  admet  $f(a)$  pour limite en  $a$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

- On dit que  $f$  est continue sur  $\Omega$  ssi  $f$  est continue en tout point de  $\Omega$ .
- On note  $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$ .

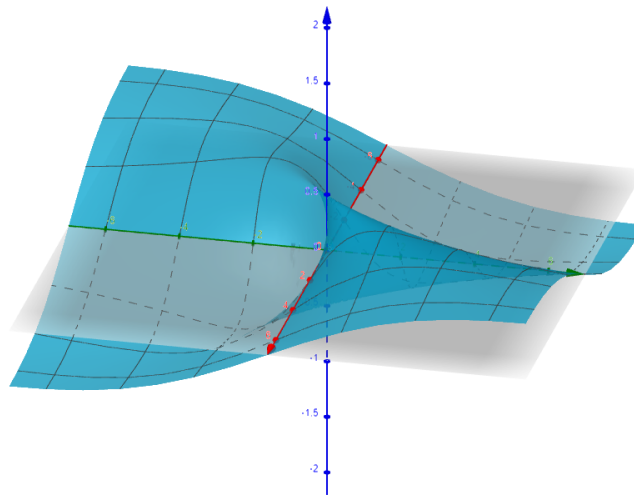
**Remarque :** Cette définition est analogue à celle vue pour les fonctions d'une variable réelle. Les résultats d'opérations restent donc vrais.

#### Définition 5

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . Posons  $D_{x_0} = \{y \in \mathbb{R}, (x_0, y) \in \Omega\}$  et  $D_{y_0} = \{x \in \mathbb{R}, (x, y_0) \in \Omega\}$ . On appelle respectivement première application partielle en  $y_0$  et deuxième application partielle en  $x_0$  les fonctions de la variable réelle :

$$f(., y_0): \begin{array}{l} D_{y_0} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, y_0) \end{array} \quad \text{et} \quad f(x_0, .): \begin{array}{l} D_{x_0} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto f(x_0, y). \end{array}$$

**Remarque :** Les applications partielles donnent que des informations dans deux directions privilégiées. Par exemple, soit  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ . Les applications partielles  $f(0, .)$  et  $f(., 0)$  sont nulles mais  $f$  n'est pas nulle au voisinage de  $(0,0)$ . En effet, si  $x \neq 0, f(x, x) = \frac{1}{2}$ .



#### Proposition 2

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . Si  $f$  est continue en  $a$  alors ses applications partielles sont continues en  $x_0$  et  $y_0$ .

*Preuve.*

□

**Remarque :** La réciproque est fautive. Par exemple, soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Les applications partielles  $f(0, .)$  et  $f(., 0)$  sont constantes nulles donc sont continues en 0. Mais  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$  car :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, x) = \frac{1}{2}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \neq f(0,0)$ .

⇨ **Exemple 2 :** Etudier la continuité en  $(0,0)$  des fonctions suivantes de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  :

- $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ,
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ,

## II Dérivées partielles

### 2.1 Définition

#### Définition 6

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ .

- On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  par rapport à la première variable ssi  $f(\cdot, y_0)$  est dérivable en  $x_0$  et on note :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  cette dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

- On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  par rapport à la deuxième variable ssi  $f(x_0, \cdot)$  est dérivable en  $y_0$  et on note :

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  cette dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

- Lorsqu'elles existent, on note  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  les fonctions dérivées partielles.

#### Remarque :

- Dans les cas simples, le calcul de dérivées partielles se fait comme un calcul de dérivée. Par exemple :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + xy + e^y$ . On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + e^y.$$

- L'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la continuité. Par exemple :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme  $f(\cdot, 0)$  et  $f(0, \cdot)$  sont nulles,  $f$  admet des dérivées partielles en  $(0,0)$  et comme  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x, x) = 1$ ,  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$ .

⇨ **Exemple 3 :** Si elles existent, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ,
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2 + (y-x)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

### 2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

#### Définition 7

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  ssi ses dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent et sont continues sur  $\Omega$ .

On note  $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

⇨ **Exemple 4 :** Les fonctions suivantes sont-elles  $\mathcal{C}^1$  en  $(0,0)$  ?

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ,
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2 + (y-x)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

**Proposition 3 : Développement limité d'ordre 1**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . On a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

**Remarque :**

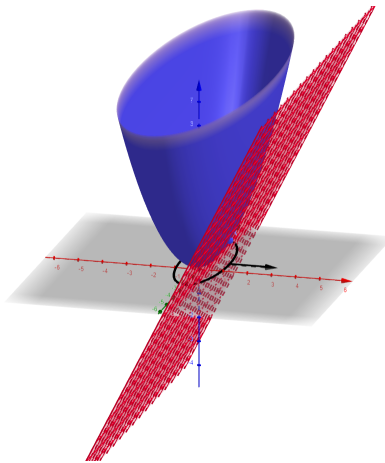
- La preuve est hors programme.
- Le développement limité d'ordre 1 montre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$  est une approximation linéaire de  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ .
- On a :

$$f(x, y) \underset{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}{=} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Donc, par analogie avec les fonctions d'une variable :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est une équation du plan tangent en  $(x_0, y_0)$  à la surface  $z = f(x, y)$ .

**Corollaire 1**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Toute fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  est continue sur  $\Omega$ .

**2.3 Gradient****Définition 8**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . On appelle gradient de  $f$  en  $a = (x_0, y_0)$  et on note  $\nabla f(x_0, y_0)$  le vecteur :

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

**Proposition 4 : Développement limité d'ordre 1**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . On a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|).$$

**Remarque :** Le gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  définit la direction dans laquelle  $f$  croît le plus vite. En effet :

$$\frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)|}{\|(h, k)\|} = \frac{|\langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle|}{\|(h, k)\|} + o(1)$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{|\langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle|}{\|(h, k)\|} \leq \|\nabla f(x_0, y_0)\|,$$

avec égalité ssi  $(h, k)$  est colinéaire à  $\nabla f(x_0, y_0)$ . Ainsi la pente maximale en valeur absolue est atteinte pour les vecteurs colinéaires au gradient.

### III Dérivées partielles et composées

#### 3.1 Dérivée selon un vecteur

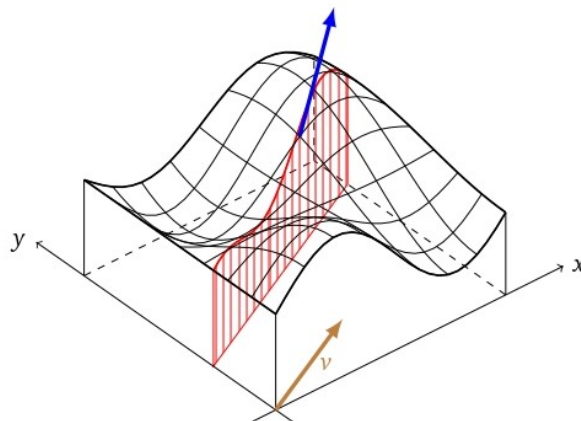
##### Définition 9

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . Soit  $v$  un vecteur non nul,  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . On dit que  $f$  est dérivable selon le vecteur  $v$  ssi l'application  $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$  est dérivable en 0, on appelle alors dérivée en  $a$  selon le vecteur  $v$  et on note  $D_v f(a)$  cette dérivée :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Remarque :

- Les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont les dérivées selon les vecteurs de la base canonique  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ .
- La dérivée selon un vecteur  $v$  correspond à la pente de la tangente à la fonction dans la direction du vecteur  $v$ .



##### Proposition 5

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Soit  $a = (x_0, y_0) \in \Omega$ . On a :

$$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Preuve.

□

#### 3.2 Règle de la chaîne

##### Proposition 6

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soient  $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  telles que :  $\forall t \in I, ((x(t), y(t)) \in \Omega$ .

Posons :

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Alors  $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  et :

$$\forall t \in I, g'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Preuve.

□

**Remarque :**

- On peut également noter :

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

- On considère un arc paramétré  $\gamma : \gamma(t) = (x(t), y(t))$ . On a :

$$(f \circ \gamma)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Cette formule représente la dérivée de  $f$  selon l'arc  $\gamma$ .

- Soit  $k \in \mathbb{R}$ , la ligne de niveau  $k$  est l'ensemble des points pour lesquels  $f$  est constante égale à  $k$ . Si on considère que cette ligne de niveau est paramétré par un arc  $\gamma$ , on a :

$$\forall t \in I, f \circ \gamma(t) = k.$$

Donc :

$$\forall t \in I, \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = (f \circ \gamma)'(t) = 0.$$

Comme  $\gamma'(t)$  dirige la tangente à l'arc  $\gamma$ , c'est-à-dire la tangente à la ligne de niveau, alors : le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction.

**Proposition 7**

Soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega_1, \mathbb{R})$ . Soient  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$  telles que :  $\forall (u, v) \in \Omega_2, (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in \Omega_1$ .

Posons :

$$g: \begin{array}{l} \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \end{array}$$

Alors  $g \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$  et :

$$\forall (u, v) \in \Omega_2, \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(u, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \end{aligned}$$

⇔ **Exemple 5 :** Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1.  $(x, y) \mapsto f(y, x)$ ,
2.  $(x, y) \mapsto f(x, x)$ ,
3.  $(x, y) \mapsto xyf(xy, x^2)$ ,
4.  $(x, y) \mapsto f(f(x, y), f(y, x))$ .

⇔ **Exemple 6 :** Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Calculer les dérivées partielles de :  $(r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ .

⇔ **Exemple 7 :** Déterminer les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y.$$

On pourra poser  $(u, v) = (x, x + 2y)$ .

## IV Extremums

### Définition 10

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . Soit  $a \in \Omega$ . On dit que :

- $f$  admet un minimum global en  $a$  ssi :

$$\forall u \in \Omega, f(a) \leq f(u),$$

- $f$  admet un maximum global en  $a$  ssi :

$$\forall u \in \Omega, f(a) \geq f(u),$$

- $f$  admet un extremum global en  $a$  ssi  $f$  admet un minimum ou un maximum global en  $a$ ,
- $f$  admet un minimum local en  $a$  ssi :

$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a, r), f(a) \leq f(u),$$

- $f$  admet un maximum local en  $a$  ssi :

$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a, r), f(a) \geq f(u),$$

- $f$  admet un extremum local en  $a$  ssi  $f$  admet un minimum ou un maximum local en  $a$ .

### Définition 11

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ . Soit  $a \in \Omega$ . On dit que  $a$  est un point critique de  $f$  ssi  $f$  admet des dérivées partielles nulles en  $a$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\nabla f(a) = (0, 0).$$

### Proposition 8

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ . Soit  $a \in \Omega$ .

Si  $f$  admet un extremum local en  $a$  alors  $a$  est un point critique de  $f$ .

**Remarque :** Comme pour les fonctions d'une variable, la réciproque est fautive. Par exemple,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$  admet un point critique en  $(0, 0)$  mais  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local car :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, x) = x^2 > f(0, 0)$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x, -x) = -x^2 < f(0, 0)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} (x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x, -x) = (0, 0)$ .

Preuve. □

⇔ **Exemple 8 :** Etudier les extremums de :

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$  ,
2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^4 + y^4$  .
3.  $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto x(\ln x)^2 + y^2$  .